METHODEN ZUR MESSUNG VON PHASENDIFFERENZEN VON WECHSELSTRÖMEN GLEICHER PERIODE.

INAUGURAL-DISSERTATION

EINER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT (II. SECTION)

DER

KGL. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT

VON

OSCAR H. MARTIENSSEN.

MIT 1 TAFEL.

LEIPZIG,
JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1897.

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Inhalt.

Seite

I. Definition der Phasendifferenz beliebig verlaufender Wechselströme 5
II. Die Gleichung eines Stromes mit Widerstand und Selbstinduction, erzeugt durch eine periodische electromotorische Kraft . . 10
III. Verschiedene Messmethoden zur Phasendifferenzenbestimmung . 17
1. Directe Messmethoden 17
2. Indirecte Messmethoden 22
3. Indicatormethoden 25

1. Methode.

Phasendifferenzenmessung mittels Galvanometer und Contactrad . . 27
1. Apparate 27
2. Vorversuche 30
3. Versuche mit dem Phasenmesser 32
a) Prüfung der Messmethode 32
b) Einige Messungen mit Hülfe der Methode 37
c) Selbstinductionsbestimmung durch Phasenmessung . . 39

2. Methode.

Phasendifferenzenmessung mittels Phasenindicator 42
1. TheoretischeB egründung 42
2. Apparate 49
3. Versuche 52

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546007_0161

I. Definition der Phasendifferenz beliebig verlaufender Wechselströme.

Wechselströme sind solche electrische Ströme, deren Stromstärken sich mit der Zeit periodisch ändern und abwechselnd positives und negatives Vorzeichen haben. Es muss daher jeder Wechselstrom innerhalb einer Periode wenigstens 2 mal durch 0 gehen.

Als zeitliche Phasendifferenz zweier Wechselströme gleicher Periode soll die zeitliche Differenz des Durchganges durch 0 in gleichem Sinne definiert werden; dieselbe kann höchstens gleich der Periode sein.

Die zeitliche Phasendifferenz sei stets mit Θ bezeichnet. Als numerische Phasendifferenz ist dann die Grösse $\varphi = 2\pi \cdot \Theta/T$ zu verstehen, wenn T die ganze Periode der Ströme angiebt; hierbei ist φ in Kreisbogenlängen ausgedrückt.

In Graden gemessen hat man $\varphi' = 360 \cdot (\Theta/T)$.

Der einfachste Fall einer periodischen Veränderung ist der, dass dieselbe sinusartig verläuft. Zwei derartige Wechselströme sind dann dargestellt durch die Gleichungen

$$i_1 = J_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi_1\right), \quad i_2 = J_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi_2\right),$$

wo i_1, i_2 veränderliche, J_1, J_2 constante Stromstärken sind und t die Zeit misst. Es ist dann die Grösse

$$\varphi_1 - \varphi_2$$

die numerische Phasendifferenz beider Ströme.

Um nun auch für beliebige Wechselströme die analytische Bedeutung der Phasendifferenz zu erkennen, sei es gestattet, die Darstellung periodischer Functionen zunächst allgemein zu behandeln.

Nach Fourier ist jede beliebige Function $f(x)$ innerhalb der Grenzen $-\infty < x < +\infty$ darstellbar durch das Integral:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \left\{\cos \omega x \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot \cos \omega \xi \, d\xi + \sin \omega x \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \omega \xi \, d\xi\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \left\{\alpha_\omega \cdot \cos \omega x + \beta_\omega \sin \omega x\right\},$$

wo α_ω, β_ω constant in x sind.

Soll nun $f(x)$ eine periodische Function sein, so muss für jedes x gelten

$$f(x) = f(x + T).$$

Dieses eingesetzt giebt die identische Gleichung:

$$\int_0^{\infty} d\omega \left\{\alpha_\omega \cdot \cos \omega x + \beta_\omega \cdot \sin \omega x\right\}$$

$$= \int_0^{\infty} d\omega \left\{\alpha_\omega \cdot \cos \omega (x + T) + \beta_\omega \sin \omega (x + T)\right\}.$$

Diese Gleichung kann nur für beliebige x erfüllt sein, wenn $\cos \omega x = \cos \omega (x + T)$ und $\sin \omega x = \sin \omega (x + T)$, woraus folgt

$$\omega = \varkappa \frac{2\pi}{T},$$

wo $\varkappa$ die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft.

Also müssen sein $\alpha_\omega = \beta_\omega = 0$ für $\omega \gtrless \varkappa (2\pi/T)$.

Es verwandelt sich demnach das Integral in die Summe

$$(1) \qquad f(x) = \sum_0^{\infty}{}_{\varkappa} \left\{\alpha_\varkappa \cdot \cos \varkappa \frac{2\pi}{T} x + \beta_\varkappa \sin \varkappa \frac{2\pi}{T} x\right\},$$

wo

$$\alpha_\varkappa = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot \cos \varkappa \frac{2\pi}{T} \xi \, d\xi \quad \text{und} \quad \beta_\varkappa = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \varkappa \frac{2\pi}{T} \xi \, d\xi.$$

Die Formel (1) lässt sich umformen, indem man setzt:

$$\alpha_\varkappa = -A_\varkappa \sin \vartheta_\varkappa, \quad \beta_\varkappa = A_\varkappa \cos \vartheta_\varkappa,$$

woraus folgt

$$\operatorname{tg} \vartheta_\varkappa = -\frac{\alpha_\varkappa}{\beta_\varkappa}, \quad A_\varkappa = \sqrt{\alpha_\varkappa^2 + \beta_\varkappa^2},$$

und erhält

$$f(x) = \sum_0^{\infty}{}_{\varkappa} A_\varkappa \left\{-\cos \varkappa \frac{2\pi}{T} x \sin \vartheta_\varkappa + \sin \varkappa \frac{2\pi}{T} x \cos \vartheta_\varkappa\right\} \text{ oder}$$

(2) $$f(x) = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} A_\varkappa \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(x - \vartheta_\varkappa).$$

Die Formel (2) stellt somit jede beliebige periodische Function dar für jeden Wert der Variablen; T ist die Periode, $A_\varkappa$ und $\vartheta_\varkappa$ Constante.

Ist die Function jedoch derartig, dass der positive Teil derselben gleich dem negativen Teil ist, so lässt sich die Form vereinfachen. Eine derartige Function lässt sich nämlich stets als eine ungerade Function auffassen, d. h. als eine Function, für die gilt:

$$f(-x) = -f(x),$$

indem für eine solche Function die Gleichung gilt

$$f(x) = -f(T - x),$$

unter der Voraussetzung, dass $f(0) = 0$ ist.

Diese Bedingung kann man jedoch stets erreichen: Setze ich nämlich als Variable $y - \vartheta_0 = 0$, wo $-\vartheta_0$ Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, mithin $f(-\vartheta_0) = 0$ ist, so habe ich aus (1), wenn man bezeichnet $f(x) = f(y - \vartheta_0) = g(y)$

$$g(y) = \sum_{0}^{\infty} \alpha_\varkappa' \cdot \cos \varkappa \frac{2\pi}{T}(y - \vartheta_0) + \beta_\varkappa' \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(y - \vartheta_0),$$

wo die Bedingung erfüllt:

$$g(0) = f(-\vartheta_0) = 0.$$

Hier sind aber alle $\alpha_\varkappa' = 0$, denn es ist

$$\alpha_\varkappa' = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \cdot \cos \varkappa \frac{2\pi}{T} \xi \cdot g(\xi) = \int_{-\infty}^{0} d\xi \cdot \cos \varkappa \frac{2\pi}{T} \cdot g(\xi) + \int_{0}^{\infty} d\xi \cdot \cos \varkappa \frac{2\pi}{T} \cdot g(\xi),$$

oder, wenn im 1. Integral $-\xi$ statt ξ geschrieben wird:

$$\alpha_\varkappa' = -\int_{\infty}^{0} d\xi \cdot \cos \varkappa \frac{2\pi}{T} \xi \cdot g(-\xi) + \int_{0}^{\infty} d\xi \cos \varkappa \frac{2\pi}{T} \xi \, g(\xi)$$

$$= \int_{0}^{\infty} d\xi \cos \varkappa \frac{2\pi}{T} \xi \left\{ g(\xi) + g(-\xi) \right\} = 0.$$

Mithin erhalte ich, wenn $\beta_\varkappa' = B_\varkappa$ geschrieben:

(3) $$g(y) = \sum_{1}^{\infty} B_\varkappa \cdot \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(y - \vartheta_0)$$

als Darstellung jeder periodischen Function, die die Bedingung erfüllt $g(y) = -g(T-y)$,
d. h. deren positiver Teil gleich dem negativen ist.

Mit zwei Gleichungen der Form (3) kann ich auch jede beliebige periodische Function darstellen, indem ich die erste Hälfte jeder Periode durch eine derartige Gleichung, die zweite Hälfte durch eine zweite mit anderen Coefficienten ausdrücke.

Stellt nämlich die Curve $ABCDE$ (Fig. 1) eine beliebige Function während der Dauer einer Periode dar, so zeichne ich dieselbe Curve in umgekehrter Lage und ziehe CC' durch den Punkt $\vartheta_0 + \frac{1}{2}T$. Dann habe ich zwei symmetrische Curven, nämlich $ABCC'B'E$ und $AD'C'CDE$. Die erste läuft mit der darzustellenden Function von ϑ_0 bis $\vartheta_0 + T/2$; die zweite von

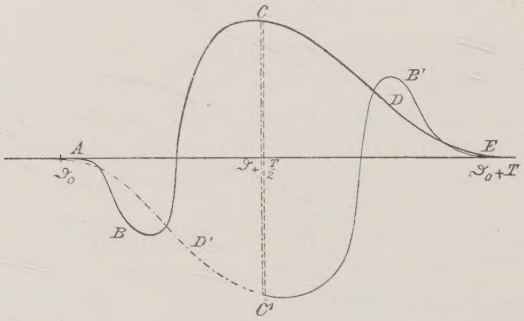


Fig. 1.

$\vartheta_0 + T/2$ bis $\vartheta_0 + T$ zusammen. Bei $\vartheta_0 + T/2$ selbst machen beide einen Sprung von C nach C', bez. von C' nach C; für ϑ_0 und $\vartheta_0 + T$ haben beide Curven den Wert 0. Stelle ich nun die eine symmetrische Curve durch eine Gleichung der Form (3), die andere durch eine analoge mit anderen Coefficienten dar, so wird die beliebige periodische Function $ABCDE$ dargestellt durch die beiden Gleichungen:

$$(4)\quad \begin{cases} g(y) = \sum_1^\infty {}_\varkappa C_\varkappa \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(y - \vartheta_0) \\ \text{für jedes } y \text{ innerhalb der Grenzen } (\vartheta_0 + nT) < y < \vartheta_0 + (n+\tfrac{1}{2})T \\ = \sum_1^\infty {}_\varkappa D_\varkappa \cdot \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(y - \vartheta_0) \\ \text{für jedes } y \text{ innerhalb der Grenzen } \vartheta_0 + (n+\tfrac{1}{2})T < y < (\vartheta_0 + nT), \end{cases}$$

an den Grenzen $(\vartheta_0 + nT)$ gelten beide Gleichungen; für $y = \vartheta_0 + (n + \frac{1}{2})T$ geben dagegen die Gleichungen beide den Wert 0; an dieser Stelle allein wird also die Function nicht durch die Gleichungen dargestellt.

Zusatz: Für eine symmetrische Function, deren aufsteigender Ast gleich dem absteigenden ist, mithin $g(y) = g(T/2 - y)$, sind alle $B_\varkappa = 0$, wo $\varkappa$ eine gerade Zahl ist, wie man graphisch sofort erkennt.

Kommen wir jetzt auf die Definition der Phasendifferenz beliebig verlaufender Wechselströme zurück.

Sind die beiden Ströme durch Gleichung (3) darstellbar, also gegeben in der Form:

$$(5)\quad i_1 = \sum_1^\infty{}_\varkappa J_{1\varkappa} \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(t - \Theta_{10}), \quad i_2 = \sum_1^\infty{}_\varkappa J_{2\varkappa} \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(t - \Theta_{20}),$$

wo i_1, i_2 die momentane Stromstärke, $J_{1\varkappa}$, $J_{2\varkappa}$ die Amplituden der einzelnen Teilschwingungen, Θ_{10} und Θ_{20} die Phasen angeben und t die Zeit misst, so ist die oben definierte Phasendifferenz gegeben durch die Gleichung:

$$\Theta = \Theta_{10} - \Theta_{20},$$

indem Θ_{10} und Θ_{20} Wurzeln der Gleichungen $i_1(t) = 0$ und $i_2(t) = 0$ sind. Sind die beiden Ströme in der Form (2) dargestellt, mithin:

$$(6)\quad i_1 = \sum_1^\infty{}_\varkappa J_{1\varkappa} \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(t - \Theta_{1\varkappa}), \quad i_2 = \sum_1^\infty{}_\varkappa J_{2\varkappa} \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(t - \Theta_{2\varkappa}),$$

so sollen wieder Θ_{10} und Θ_{20} Wurzeln der Gleichungen

$$i_1 = 0 \quad \text{und} \quad i_2 = 0$$

sein; dann gilt ebenfalls

$$\Theta = \Theta_{10} - \Theta_{20}.$$

Sind die beiden Ströme in der Form (4) gegeben, also:

$$(5\,\text{a})\quad \begin{cases} i_1 = \sum_1^\infty{}_\varkappa J_{1\varkappa} \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(t - \Theta_{10}), \quad i_2 = \sum_1^\infty{}_\varkappa J_{2\varkappa} \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(t - \Theta_{20}) \\ \qquad \text{für die erste Hälfte der Periode,} \\ = \sum_1^\infty{}_\varkappa J'_{1\varkappa} \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(t - \Theta_{10}), \quad = \sum_1^\infty{}_\varkappa J'_{2\varkappa} \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(t - \Theta_{20}) \\ \qquad \text{für die zweite Hälfte der Periode,} \end{cases}$$

so ist genau so wie in (5):

$$\Theta = \Theta_{10} - \Theta_{20}.$$

Zusatz: Meistens werden $i_1 = 0$ und $i_2 = 0$ innerhalb jeder Periode je zwei Wurzeln haben; es sind dann Θ_{10} und Θ_{20} gleichartig zu wählen, d. h. so, dass i_1 und i_2 an diesen Stellen entweder beide vom Negativen ins Positive oder beide vom Positiven ins Negative übergehen.

Haben $i_1 = 0$ und $i_2 = 0$ innerhalb einer Periode mehr als zwei Wurzeln, so ist die Phasendifferenz beider Ströme nicht definierbar.

II. Die Gleichung eines Stromes mit Widerstand und Selbstinduction, erzeugt durch eine periodische electromotorische Kraft.

Bevor wir auf die Messung der Phasendifferenz beliebig verlaufender Wechselströme eingehen, erscheint es notwendig, die Verhältnisse in einem Wechselstromkreise näher zu untersuchen; dabei soll nur Widerstand und Selbstinduction Berücksichtigung finden. Wenn auch Capacität von Bedeutung ist, so werden die Constanten andere, ohne dass die allgemeinen Gesetze im wesentlichen eine andere Gestalt annehmen.

Die erhaltenen Gleichungen stimmen im allgemeinen mit denen der Herren Bedell und Crehore[1]) überein und sind speciell zur Erkenntniss der Phasendifferenz der wirkenden electromotorischen Kraft und des resultierenden Stromes umgeformt und benutzt worden. Für Stromverzweigungen lassen sich dieselben leicht nach den für Sinusströme gefundenen Gesetzen[2]) anwenden.

Bezeichnen wir mit e eine veränderliche wirkende electromotorische Kraft, mit i den von derselben in einem Stromkreis mit dem Selbstinductionscoefficienten L und Ohm'schen Wider-

---

1) Bedell und Crehore, Der Wechselstrom.

2) Th. H. Blakesley, Die electrischen Wechselströme. J. Puluj, Ueber die Wirkungen gleichger. etc. Wiener Berichte p. 767 ff. 1891; Ueber die Phasendifferenz etc. Wiener Berichte p. 361 ff. 1893. Benischke, Electro-techn. Zeitschr. p. 612 ff. 1895. und viele andere.

stand R hervorgerufenen Strom. so gilt nach Helmholtz allgemein:

$$e = i \cdot R + L \frac{di}{dt}. \tag{7}$$

indem $i \cdot R$ die Kraft ist, die die Wärme im Leiter, $L(di/dt)$ diejenige. die das magnetische Feld in der Umgebung des Leiters erzeugt.

Das allgemeine Integral der Gleichung lautet:

$$i = \varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \left\{ C + \frac{1}{L} \int_0^t \varepsilon^{\frac{R}{L}t} \cdot e\, dt \right\}. \tag{8}$$

wo ε die Basis der natürlichen Logarithmen, C eine Constante ist. Der Summand $C \cdot \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}$ hat nur einen beträglichen Wert sofort. nachdem der Stromkreis geschlossen. Die Constante C hängt von der Phase der electromotorischen Kraft im Momente des Stromschlusses ab; nach dem Stromschluss sinkt der Summand sehr schnell auf 0 herab und soll im Folgenden vernachlässigt werden.

Es sei nun zunächst e eine harmonische Function der Zeit und gegeben durch

$$e = E \sin \frac{2\pi}{T} t, \tag{9}$$

setzt man diesen Wert in (8) ein und berücksichtigt, dass

$$\int_0^t \varepsilon^{\frac{R}{L}t} \cdot \sin pt\, dt = \frac{1}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + p^2} \cdot \varepsilon^{\frac{R}{L}t} \left\{ \frac{R}{L} \sin pt - p \cos pt \right\},$$

wo

$$\frac{2\pi}{T} = p$$

geschrieben ist, so erhält man:

$$i = \frac{E}{L\left(\frac{R}{L}\right)^2 + p^2} \left\{ \frac{R}{L} \sin pt - p \cos pt \right\}$$

$$= \frac{L}{R^2} \cdot \frac{E}{1 + \left(p \frac{L}{R}\right)^2} \left\{ \frac{R}{L} \sin pt - p \cos pt \right\},$$

setze ich jetzt:

$$\frac{R}{L} \sin pt - p \cos pt = j \cdot \sin(pt - \varphi),$$

so bestimmt sich aus:

$$-p = -\gamma \sin\varphi \quad \text{für} \quad t = 0$$

und

$$\frac{R}{L} = \gamma \cos\varphi \quad \text{für} \quad pt = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = p\frac{L}{R} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{R}{L}\sqrt{1 + \left(p\frac{L}{R}\right)^2},$$

schreibe ich ferner noch

$$p \cdot \frac{L}{R} = c,$$

so erhalte ich

$$i = \frac{E}{R\sqrt{1+c^2}} \sin(pt - \varphi). \tag{10}$$

Gleichung (10) giebt die Stromstärke für eine harmonische electromotorische Kraft.

Analog lässt sich eine Gleichung des Stromes ableiten, wenn die electromotorische Kraft einen beliebigen Verlauf zeigt.

Sei demnach e im allgemeinsten Falle gegeben durch die Gleichung (2):

$$e = \sum_{1}^{\infty} E_\varkappa \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(t - \Theta_\varkappa),$$

dann hat man analog

$$\int_0^t \varepsilon^{\frac{R}{L}t} \sin \varkappa p (t - \Theta_\varkappa)\, dt$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \varkappa^2 p^2} \cdot \varepsilon^{\frac{R}{L}t}\left\{\frac{R}{L}\sin \varkappa p (t - \Theta_\varkappa) - \varkappa p \cos \varkappa p (t - \Theta_\varkappa)\right\}$$

und erhält eingesetzt:

$$i = \frac{L}{R}\sum_{1}^{\infty} \frac{E_\varkappa}{\left(p\frac{L}{R}\right)^2 + 1}\left\{\frac{R}{L}\sin \varkappa p (t - \Theta_\varkappa) - \varkappa p \cdot \cos \varkappa p (t - \Theta_\varkappa)\right\}.$$

Setze ich jetzt wieder

$$\frac{R}{L}\sin \varkappa p (t - \Theta_\varkappa) - \varkappa p \cdot \cos \varkappa p (t - \Theta_\varkappa) = \gamma_\varkappa \cdot \sin(\varkappa p (t - \Theta_\varkappa) - \varphi_\varkappa),$$

so bestimmt sich aus

$$-\varkappa p = -\gamma_\varkappa \sin\varphi_\varkappa \quad \text{für} \quad t = \Theta_\varkappa$$

und $$\frac{R}{L} = \gamma_\varkappa \cos \varphi_\varkappa \quad \text{für} \quad \varkappa p(t - \Theta_\varkappa) = \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma_\varkappa = \frac{R}{L}\sqrt{1 + \varkappa^2 p^2 \frac{L^2}{R^2}} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \varphi_\varkappa = \varkappa p \frac{L}{R}.$$

Dies eingesetzt ergiebt:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} i = \frac{1}{R}\left[\frac{E_1}{\sqrt{1 + c^2}} \sin(p(t - \Theta_1) - \varphi_1)\right. \\ \left. \quad + \frac{E_2}{\sqrt{1 + 4c^2}} \sin(2p(t - \Theta_2) - \varphi_2) + \cdots\right]. \end{array} \right.$$

Die Gleichung (11) gilt somit für jede beliebige electromotorische Kraft. Ist letztere symmetrisch, lässt sich also darstellen nach (3) durch:

$$e = \sum_1^\infty E_\varkappa \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(t - \Theta_0),$$

so tritt in (11) statt Θ_1, Θ_2, $\cdots\Theta_\varkappa\cdots$ überall Θ_0.

Ist dieselbe unsymmetrisch, aber dargestellt durch zwei Gleichungen nach (4):

$$e = \sum_1^\infty E_\varkappa \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(t - \Theta_0) \text{ für } (\Theta_0 + nT) < t < (\Theta_0 + (n + \tfrac{1}{2})T)$$

$$= \sum_1^\infty E'_\varkappa \sin \varkappa \frac{2\pi}{T}(t - \Theta_0) \text{ für } (\Theta_0 + (n + \tfrac{1}{2})T) < t < (\Theta_0 + (n + 1)T)$$

so treten statt (11) auch zwei analoge Gleichungen ein.

In (11) sind:

$$c = p\frac{L}{R}, \quad p = \frac{2\pi}{T}, \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = c, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = 2c \cdots\cdots$$

Die Gleichung gilt auch, wenn Capacität im Stromkreis vorhanden ist; nur bekommt dann die Constante c eine andere Bedeutung. Man erkennt, dass der Strom einen anderen Verlauf hat als die treibende electromotorische Kraft, und die Curve desselben wesentlich abhängt von der Grösse c.

Nachstehende Fig. 2 giebt ein Beispiel. Es wurde gewählt:

$$R = 1, \quad c = 1$$

und als Gleichung der electromotorischen Kraft:

$$e = \sin pt + \tfrac{1}{3}\sin 4pt;$$

dann ist nach (11):

$$i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(pt - 45^0) + \frac{1}{3\sqrt{5}}\sin(4pt - 76^0).$$

Man erkennt, welch verschiedenen Verlauf e und i aufweisen.

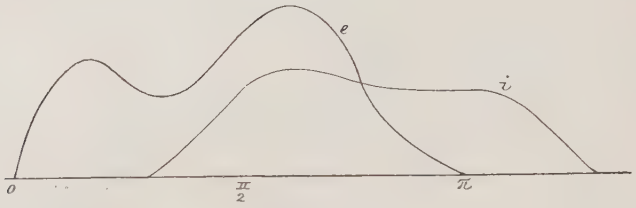


Fig. 2.

Aus (11) ersieht man ferner, dass der Strom der Sinuscurve sich mit wachsendem c nähert, indem dann die Amplituden der Teilschwingungen abnehmen. Sehr kurze Teilschwingungen der Spannung werden bei einigermaassen grossem c überhaupt keinen Einfluss auf den Stromverlauf haben.

Ist ferner der Verlauf von e symmetrisch (der positive Teil gleich dem negativen), so braucht dies bei der Stromcurve nicht der Fall zu sein.

Von besonderem Interesse ist es für uns, zu erkennen, welche Phasendifferenz der Strom i mit der wirkenden electromotorischen Kraft aufweist. Nach der Definition ist die numerische Phasendifferenz $\varphi = \varphi_{0i} - \varphi_{0e}$, wenn φ_{0i} Wurzel der Gleichung $i = 0$, φ_{0e} der Gleichung $e = 0$, dieselben aufgelöst gedacht nach pt; mithin ist φ_{0i} gegeben durch:

$$0 = \frac{E_1}{\sqrt{1 + c^2}} \sin(\varphi_{0i} - p\Theta_1 - \varphi_1) + \frac{E_2}{\sqrt{1 + 4c^2}} \sin(2\varphi_{0i} - 2p\Theta_2 - \varphi_2) + \cdots\cdots$$

und φ_{0e} durch die Gleichung:

$$0 = E_1 \sin(\varphi_{0e} - p\Theta_1) + E_2 \sin(2\varphi_{0e} - 2p\Theta_2) + \cdots\cdots$$

Die Phasenverschiebung lässt sich jedoch einfacher ausdrücken, wenn man sich die electromotorische Kraft in der Form (5a) gegeben denkt. Dann kann ich die Zeit von einem Augenblicke an messen, in welchem die Spannung 0 ist, so dass also $\varphi_{0e} = 0$ ist, und $\varphi = \varphi_{0i}$ wird. Ferner kann nur die erste beider Gleichungen (5a) in Betracht kommen, da stets

$$0 < \varphi < \pi .$$

Ich erhalte demnach, wenn der bezügliche Teil der Spannungscurve gegeben ist durch: $e = E_1 \sin pt + E_2 \sin 2pt + \ldots$. für die Phasendifferenz φ:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \dfrac{E_1}{\sqrt{1+c^2}} \sin(\varphi - \varphi_1) + \dfrac{E_2}{\sqrt{1+4c^2}} \sin(2\varphi - \varphi_2) \\ \quad + \dfrac{E_3}{\sqrt{1+9c^2}} \sin(3\varphi - \varphi_3) + \ldots \end{array} \right.$$

wo $p = \frac{2\pi}{T}$, $c = p \frac{L}{R}$. $\operatorname{tg} \varphi_1 = c$; $\operatorname{tg} \varphi_2 = 2c \ldots$. ist.

Die Gleichung (13) ist allgemein nicht lösbar, gestattet jedoch φ in jedem gegebenen Fall zu berechnen.

Man erkennt, dass φ ausser von c auch wesentlich abhängt von den Grössen:

$$\frac{E_2}{E_1}, \frac{E_3}{E_1}, \ldots \frac{E_x}{E_1}.$$

Sind insbesondere $E_2 = E_3 = E_x = \ldots = 0$, hat mithin die electromotorische Kraft einen sinusartigen Verlauf, so erhält man die bekannte Formel:

$$(14) \qquad \varphi = \varphi_1, \text{ also } \operatorname{tg} \varphi = p \frac{L}{R}$$

Interessant ist es zu erkennen, wann $\varphi = 0$ wird.

Hierfür hat man nach (13):

$$0 = \frac{E_1}{\sqrt{1+c^2}} \sin \varphi_1 + \frac{E_2}{\sqrt{1+4c^2}} \sin \varphi_2 + \ldots$$

Die Gleichung ist zunächst erfüllt, wenn $c = 0$, wie allgemein bekannt. Berücksichtigt man aber ferner, dass

$$\sin \varphi_1 = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{2c}{\sqrt{1+4c^2}} \ldots$$

so erhält man als Bedingungsgleichung, dafür dass $\varphi = 0$:

$$(15) \qquad 0 = \frac{E_1}{1+c^2} + \frac{2E_2}{1+4c^2} + \frac{3E_3}{1+9c^2} + \ldots$$

Aus Gleichung (13) folgt ferner, dass man für kleine Phasenverschiebungen (kleiner als 4^0 im allgemeinen) bei ganz beliebiger Stromcurve setzen kann

$$(16) \qquad \operatorname{tg} \varphi = p \frac{L}{R},$$

indem nämlich dann die Grössen $\sin(\varphi - \varphi_1)$, $\sin(2\varphi - \varphi_2)$.... nur sehr klein werden, und nahezu gilt $\varphi_2 = 2\varphi_1$, $\varphi_3 = 3\varphi_1$ .....

Hierbei nehmen zwar die Fehler mit wachsendem $\varkappa$ zu, dafür aber die Coefficienten

$$\frac{E_\varkappa}{\sqrt{1-\varkappa^2 c^2}}$$

in doppelter Weise ab, sodass bei den gewöhnlich vorkommenden Stromcurven die Summe aller folgenden Glieder zu vernachlässigen sein wird.

Weicht die Curve der electrischen Kraft nur wenig von der Sinusform ab, sind also die Grössen

$$\frac{E_2}{E_1}, \frac{E_3}{E_1}, \ldots\ldots$$

klein gegen die Einheit, so wird auch φ nicht viel von φ_1 abweichen; dann lässt sich mit einiger Annäherung ein analytischer Ausdruck für φ gewinnen.

Hierzu setze ich: $\varphi = \varphi_1 + \varepsilon$, sodass ε klein gegen φ_1. Dann habe ich

$$0 = -\frac{E_1}{\sqrt{1+c^2}} \sin\varepsilon + \frac{E_2}{\sqrt{1+4c^2}} \sin\left((2\varphi_1 - \varphi_2) + 2\varepsilon\right) + \ldots.$$

oder indem

$$\sin\left((\varkappa\varphi_1 - \varphi_\varkappa) + \varkappa.\varepsilon\right) = \cos\varkappa\varepsilon.\sin(\varkappa\varphi_1 - \varphi_\varkappa) + \sin\varkappa\varepsilon.\cos(\varkappa\varphi_1 - \varphi_\varkappa)$$

$$0 = \frac{E_1}{\sqrt{1+c^2}} \sin\varepsilon + \frac{E_2}{\sqrt{1+4c^2}} \cos 2\varepsilon.\sin(2\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{E_3}{\sqrt{1+9c^2}} \cos 3\varepsilon.\sin(3\varphi_1 - \varphi_3) + \ldots. + \frac{E_2}{\sqrt{1+4c^2}} \sin 2\varepsilon.\cos(2\varphi_1 - \varphi_2) + \ldots\ldots.$$

Jetzt setze ich $\sin\varkappa\varepsilon = \varkappa.\varepsilon.\ \cos\varkappa\varepsilon = 1$.

Dies ist erlaubt, solange $\varkappa.\varepsilon$ klein ist: der Fehler wächst demnach mit $\varkappa$; bedenkt man jedoch, dass alle Coefficienten bis auf den ersten klein sind, da angenäherte Sinuscurve vorausgesetzt wurde, so wird der Gesammtfehler auf jeden Fall klein bleiben. Dies eingesetzt giebt:

$$0 = \varepsilon\left\{\frac{E_1}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{2E_2}{\sqrt{1+4c^2}} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) + \ldots.\right\} + \frac{E_2}{\sqrt{1+4c^2}} \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) + \ldots.$$

oder:

$$\varepsilon = -\frac{\frac{E_2}{\sqrt{1+4c^2}} \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{E_3}{\sqrt{1+9c^2}} \sin(3\varphi_1 - \varphi_3) + \ldots.}{\frac{E_1}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{2E_2}{\sqrt{1+4c^2}} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{3E_3}{\sqrt{1+9c^2}} \cos(3\varphi_1 - \varphi_3) + \ldots.}$$

Dividiere ich aus und vernachlässige alle Glieder mit höheren Potenzen der Coefficienten, so erhalte ich für die tolale Phasenverschiebung des Stromes gegen die treibende electromotorische Kraft:

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 - \frac{\sqrt{1+c^2}}{E_1}\left\{ \frac{E_2}{\sqrt{1+4c^2}} \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) \right. \\ &\left. + \frac{E_3}{\sqrt{1+9c^2}} \sin(3\varphi_1 - \varphi_3) + \cdots \right\} \end{aligned} \right.$$

für den Fall, dass die Stromcurve nicht stark von der Sinuscurve abweicht. Man erkennt aus der Gleichung, dass meistens bei gegebener Spannungscurve ein Wert existiert, bei dem $\varphi = \varphi_1$ wird, indem die Grössen $\sin(\varkappa\varphi_1 - \varphi_\varkappa)$ der Reihe nach ihr Vorzeichen bei wachsendem φ_1, also auch bei wachsendem c wechseln.

Die Gleichung (17) soll später zur Prüfung der experimentellen Resultate angewandt werden.

Durch diese Untersuchungen ist erwiesen, dass die Phasendifferenz zwischen erregender electromotorischer Kraft und Stromstärke, d. h. der im Leiter vorhandenen electromotorischen Kraft wesentlich abhängt von der Stromcurve, und eine Vernachlässigung dieses Umstandes zu vollkommen falschen Resultaten führen kann. Bei der experimentellen Ausführung einiger Phasenmessungen wird dies noch durch Zahlenbeispiele näher hervortreten.

III. Verschiedene Messmethoden zur Phasendifferenzenbestimmung.

Die verschiedenen Arten der Messung zur Phasendifferenzenbestimmung möchte ich in drei Klassen teilen, directe, indirecte und Indicatormethoden.

1. Directe Messmethoden.

Directe Messung nenne ich eine solche, die darin besteht, dass die zu messende Grösse eine sichtbare Veränderung, z. B. Bewegung eines Zeigers vor einer Scala verursacht, die nur von ihr selbst abhängt. Die Veränderung darf dann nur eine Function der zu messenden Grösse sein.

Bei einer Strommessung ist z. B. ein gewöhnliches Ampèremeter nach diesem Princip gebaut.

Bei der Phasenmessung ist diese Art der Messung im allgemeinen nicht anwendbar. Dieselbe setzt nämlich voraus, dass die sichtbare Veränderung ω in unserem Fall alleinige Function von φ ist, also $\omega = f(\varphi)$.

Dies ist aber nicht möglich: denn zur Messung von φ müssen jedenfalls i_1 und i_2 beide in die Function eingehen, da φ ohne beide Ströme nicht gedacht werden kann, also $\omega = f(\varphi) = g(i_1, i_2)$ sein.

Ist nun im einfachsten Fall

$$i_1 = J_1 \sin pt, \quad i_2 = J_2 \sin(pt - \varphi), \quad \text{wo} \quad p = \frac{2\pi}{T},$$

so soll ω von den Stromstärken unabhängig sein, mithin die Gleichungen gelten:

$$\frac{\partial \omega}{\partial J_1} = \frac{\partial g(i_1, i_2)}{\partial J_1} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \omega}{\partial J_2} = \frac{\partial g(i_1, i_2)}{\partial J_2} = 0.$$

Diese können durch keine Function „g“ erfüllt werden, indem:

$$\frac{\partial g}{\partial J_1} = \frac{\partial g}{\partial i_1} \cdot \frac{\partial i_1}{\partial J_1} = \frac{\partial g}{\partial i_1} \sin pt$$

und

$$\frac{\partial g}{\partial J_2} = \frac{\partial g}{\partial i_2} \cdot \frac{\partial i_2}{\partial J_2} = \frac{\partial g}{\partial i_2} \sin(pt - \varphi).$$

Da nun $\sin pt$ und $\sin(pt - \varphi)$ nicht constant 0 sind, folgt, dass sein müsste:

$$\frac{\partial g}{\partial i_1} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial i_2} = 0,$$

also g von i_1 und i_2 unabhängig.

Mithin giebt es keine Function $g(i_1, i_2) = \omega$, die von J_1 und J_2 unabhängig ist, also auch keine von φ.

Die Unmöglichkeit liegt darin, dass J_1 und J_2 unabhängige Grössen sind; sobald sie in einer gewissen Beziehung zu einander stehen, also $J_2 = h(J_1)$ ist, wird die Messung möglich. Denn dann ist die Bedingung zu erfüllen:

$$\frac{\partial g}{\partial J_1} = 0,$$

oder da jetzt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial J_1} &= \frac{\partial g}{\partial i_1} \frac{\partial i_1}{\partial J_1} + \frac{\partial g}{\partial i_2} \cdot \frac{\partial i_2}{\partial J_1} \\ &= \frac{\partial g}{\partial i_1} \sin pt + \frac{\partial g}{\partial i_2} \cdot h'(J_1) \cdot \sin(pt - \varphi), \end{aligned}$$

hat man die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial g}{\partial i_1} \sin pt + h'(J_1) \cdot \frac{\partial g}{\partial i_2} \sin(pt - \varphi) = 0 . \tag{18}$$

Eine Differentialgleichung, die alle Functionen „g" ergeben muss, die eine directe Messung unter diesen Umständen erlauben.

Ist im besonderen:

$$J_2 = n \cdot J_1 ,$$

stehen also die Stromstärken in einem constanten Verhältniss, so wird die Gleichung:

$$\frac{\partial g}{\partial i_1} \sin pt + n \frac{\partial g}{\partial i_2} \sin(pt - \varphi) = 0 . \tag{18a}$$

Eine Lösung der Gleichung ist, z. B.

$$g = \frac{i_1 + i_2}{i_1} = \frac{\sin pt + n \sin(pt - \varphi)}{\sin pt} .$$

Diese Function hat als mit der Zeit veränderlich keine Bedeutung, da für $i_1 = 0$ $g = \infty$ wird.

Nehme ich jedoch die Mittelwerte der Quadrate während der ganzen Periode, sowohl des Zählers wie des Nenners, also

$$\frac{1}{T}\int_0^T (i_1 + i_2)^2 \, dt \quad \text{und} \quad \frac{1}{T}\int_0^T i_1^{\,2} \cdot dt ,$$

so sind diese Grössen der directen Messung zugänglich, und ich habe, indem

$$i_1 + i_2 = J_1 \sin pt + nJ_1 \sin(pt - \varphi)$$
$$= \sqrt{1 + 2n\cos\varphi + n^2} \cdot J_1 \sin(pt - \psi) ,$$

wo

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{n \cdot \sin\varphi}{1 + n\cos\varphi}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T (i_1 + i_2)^2 \, dt = M(i_1 + i_2)^2 = \tfrac{1}{2} J_1^{\,2}(1 + 2n\cos\varphi + n^2)$$

und

$$\frac{1}{T}\int_0^T i_1^{\,2} \, dt = M(i_1^{\,2}) = \tfrac{1}{2} J_1^{\,2} ,$$

also wird:

$$g' = \frac{M(i_1 + i_2)^2}{M(i_1^{\,2})} = (1 + 2n\cos\varphi + n^2). \tag{19}$$

Ist speciell

$$n = 1, \quad \text{so wird} \quad g' = 2(1 + \cos\varphi) = 4\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Ein Apparat, welcher diese Function direct anzeigt, liesse sich auf folgende Weise construieren:

Zunächst wird mit Hülfe zweier Inductionsspulen, deren primäre Wickelungen von je einem der Ströme i_1 und i_2 durchflossen werden, deren secundäre Wickelungen hintereinander geschaltet sind, in letzteren ein der Grösse $p(i_1 + i_2)$ proportionaler Strom erzeugt; andererseits in einer dritten Inductionsspule in der secundären Wickelung ein Strom proportional pi_1. Der Apparat selbst besteht dann aus zwei zu einander senkrecht gestellten Spulen, in deren je ein rechtwinkeliges Stück weiches Eisen an ein und derselben Axe in gleicher Lage drehbar angeordnet sind. Dann wird die Axe um einen Winkel α gedreht werden, für den gilt:

$$\operatorname{ctg}\alpha = A \cdot g' = A \cdot (1 + 2n\cos\varphi + n^2), \quad \text{bez.} \quad \operatorname{ctg}\alpha = 4A\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

wo A eine Constante des Instrumentes ist. Denn: Die Spule 1 (Fig. 3), deren Windungsebene in senkrechter Lage gezeichnet.

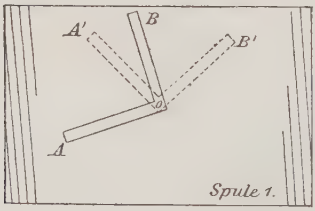


Fig. 3.

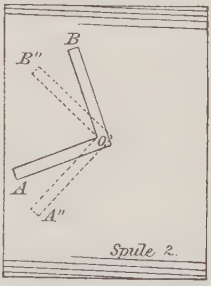


Fig. 4.

wird den Hebel AOB aus weichem Eisen in die Lage $A'OB'$ zu drehen suchen; die Spule 2 (vgl. Fig. 4) dagegen ihren Eisenwinkel in die Lage $A''OB''$. Sind dieselben nun an derselben Axe befestigt (Fig. 5), so denke ich sie mir in einen vereinigt; dann übt Spule 1, durchflossen von dem von i_1 inducierten Strom, ein Drehmoment aus, das durch L, L

der Grösse und Richtung nach dargestellt sei, die Spule 2, durch die der von $(i_1 + i_2)$ inducierte Strom fliesse, ein Drehmoment, das durch K, K gegeben.

Die beiden zusammen geben die Resultante R, R, die das System solange dreht, bis $< RAB = 90^0$. Dann ist aber

$$< RAK = \alpha = ZOH,$$

wenn $ZO \perp AB$ einen Zeiger darstellt; da ferner

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{K}{L},$$

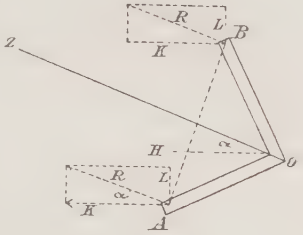


Fig. 5.

so wird, indem K proportional $M((i_1 + i_2)^2)$, L proportional $M(i_1^2)$,

$$\operatorname{ctg} \alpha = A \frac{M(i_1 + i_2)^2}{M(i_1^2)} = A(1 + 2n \cos \varphi + n^2),$$

wie zu beweisen war.

Zusatz: 1. Ist $i_1 = 0$ und $i_2 = 0$, so wird keine Richtkraft auf das System ausgeübt, und der Zeiger muss in jeder Lage zur Ruhe kommen.

2. Will man die drei Inductionsrollen vermeiden, so kann man, sobald eine gegenseitige Induction der Ströme im Apparat vernachlässigt werden darf, auf Spule 2 gleichzeitig zwei Wickelungen legen, die von i_1 und i_2 je einzeln durchflossen werden. Dieselben addieren sich dann in ihren Wirkungen so, dass wiederum eine Function von φ als Factor auftritt. Spule 1 wird dann direct von i_1 durchflossen.

3. Für genaue Messungen wird man statt des Eisens kleine Spulen wählen müssen, um von der Tourenzahl vollkommen unabhängig zu bleiben; dies ist nicht notwendig, sobald $n = 1$, also $J_2 = J_1$ ist.

4. Die Gleichheit von J_1 und J_2, bez. das constante Verhältniss „n“ derselben kann durch Abzweigung an einem inductionsfreien Widerstand hergestellt werden.

5. Für nicht sinusartigen Wechselstrom giebt der Apparat nicht die oben definierte Phasendifferenz, sondern eine Art von Mittelwert.

Dieser Umstand, und die Bedingung, dass $J_1 = n \cdot J_2$ sein muss, beschränken die Anwendbarkeit des Apparates, wenigstens solange es sich um genaue Messungen handelt. Ich habe daher diese Methode nicht experimentell untersucht oder theoretisch weiter ausgearbeitet.

Bei der directen Messmethode muss noch ein Instrument von v. Dolivo-Dobrowolsky [1]) Erwähnung finden, das den Namen „Phasenmessinstrument" trägt. Dasselbe, ein einfacher Drehstrommotor im kleinen, dem eine Torsionsfeder als Gegenkraft dient, giebt thatsächlich, wie der Erfinder selbst betont, nicht die Phasendifferenz an, sondern es ist bestimmt, den „Leerstrom" nach der Ausdrucksweise der Techniker zu messen. Damit setzt es bei gegebener Aichung Constanz der Spannung, der Wechselzahl und der Stromcurve voraus, kann also hier nicht weiter in Betracht kommen.

2. Indirecte Messmethoden.

Unter einer indirecten Messung verstehe ich eine solche, die aus mehreren einzelnen Messungen besteht, aus denen alle nicht verlangten Variabeln eliminiert werden müssen. Dabei müssen wenigstens soviele Messungen ausgeführt werden, wie Variabeln bei denselben in Mitwirkung kommen; die zu messende Grösse ist demnach nicht durch eine Gleichung, sondern durch ein System von Gleichungen mit mehreren Unbekannten gegeben.

Setzen wir nun bei der Messung von Phasendifferenzen zunächst wieder Ströme von sinusartigem Verlauf voraus, mithin:

$$i_1 = J_1 \sin pt, \quad i_2 = J_2 \sin(pt - \varphi),$$

so verlangt die Methode die Bestimmung von wenigstens drei Functionen:

$$f(i_1, i_2), \quad \varphi(i_1, i_2), \quad \psi(i_1, i_2),$$

bez. deren Mittelwerte während der ganzen Periode:

$$M(f(i_1, i_2)), \quad M(\varphi(i_1, i_2)), \quad M(\psi(i_1, i_2)),$$

sodass man drei Gleichungen erhält, aus denen J_1 und J_2 eliminiert werden müssen, um φ zu erhalten.

1) v. Dolivo-Dobrowolsky, Instrument zur Bestimmung von Phasenunterschieden bei Wechselstrom. Electr.-techn. Zeitschr. p. 350. 1894.

Auf diesem Princip beruht die bekannte Methode mittels dreier Dynamometer[1]); nach derselben wird ein Dynamometer in den ersten Strom, das zweite in den zweiten, und das dritte derartig eingeschaltet, dass der erste Strom die feste, der zweite die bewegliche Spule durchläuft oder umgekehrt. Sind dann A_1, A_2, A_3 die bez. Reductionsfactoren der Dynamometer, α_1, α_2, α_3 die erhaltenen Ausschläge, so gilt:

$$A_1^2 \cdot \alpha_1 = J_1^2, \quad A_2^2 \cdot \alpha_2 = J_2^2, \quad A_3^2 \alpha_3 = J_1 \cdot J_2 \cdot \cos\varphi$$

und daraus:

$$\cos\varphi = \frac{A_3^2 \cdot \alpha_3}{A_1 \cdot A_2 \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2}}.$$

Die Methode setzt voraus, dass beide Ströme während der Messung ihre Stärke (Amplituden) nicht ändern und ist stets der drei Instrumente wegen äusserst schwerfällig.

Auch bei völlig constantem Strom kann man alle drei Messungen nicht hintereinander mit demselben Instrument ausführen, weil bei dem Umschalten der Ströme durch die Selbstinduction des Instrumentes die Phasendifferenz selbst verändert wird.

Bei beliebig verlaufendem Wechselstrom giebt diese Methode einen nicht näher zu definierenden Mittelwert, analog dem oben beschriebenen Apparate.

Ein weiterer Nachteil ist die umständliche Berechnung. Für exacte Messungen ist die indirecte Messmethode bei beliebig verlaufenden Strömen überhaupt unbrauchbar.

Sind nämlich beide Ströme gegeben in der Form:

$$i_1 = \sum_1^\infty{}_\varkappa J_{1\varkappa} \sin \varkappa pt, \quad i_2 = \sum_1^\infty{}_\varkappa J_{2\varkappa} \sin \varkappa (pt - \varphi)$$

so müsste streng genommen eine Gleichung mehr bestimmt werden, wie Grössen $J_{1\varkappa}$, $J_{2\varkappa}$ merkliche Werte haben, was natürlich praktisch kaum ausführbar sein wird.

An dieser Stelle muss noch der Phasenindicator von J. Puluj[2]) Erwähnung finden. Derselbe benutzt zwei mit Glasspiegel und Anker versehene Stahlfedern, die mit Hülfe zweier kleiner Electromagnete durch die beiden Wechselströme in

1) J. Puluj, Wiener Berichte. p. 356. 1893.

2) Ueber einen Phasenindicator und einige mit demselben ausgeführte Messungen, Wiener Berichte p. 815 ff. 1893.

schwingende Bewegung versetzt werden; bei Anwendung der Lissajous'schen Schwingungsmethode kann dann aus der Lage der resultierenden elliptischen Schwingungscurve direct auf die Phasendifferenz geschlossen werden. Der Erfinder erhält die Beziehung, wenn mit A und B die Maximalwerte, mit $2a$ und $2b$ die Abschnitte der Ellipse auf der x- und y-Axe bezeichnet werden:

$$\sin 2\varphi = \frac{b}{B} = \frac{a}{A} \text{ für } \varphi < 90^0.$$

Liegt φ in den anderen Quadranten, so treten entsprechende Gleichungen an ihre Stelle.

Hier muss es nach obigen Ausführungen auffallen, dass nur zwei Messungen zur Bestimmung von φ nötig sind. Dies erklärt sich dadurch, dass bei dieser Methode die Messung für einen bestimmten Moment der Periode möglich gemacht wird, und dadurch ein Moment gewählt werden kann, wo eine der Grössen $J_1 \sin p\,t$ oder $J_2 \sin (pt - \varphi)$ gleich 0 wird. Der Wegfall der 3. Messung ist aber nur scheinbar, indem die Messung einmal dem Coordinatensystem, auf das die Ellipse bezogen wird, eine bestimmte Stellung zu den schwingenden Federn vorschreibt, andererseits verlangt wird, dass die Eigenschwingung der Federn angenähert dieselbe Periode hat, wie die des Wechselstroms, mithin eine Messung letzterer hinzukommt. Was der Apparat als Phasendifferenz bei beliebiger Stromcurve angiebt, scheint auch hier nicht definierbar; auch wird die Schwingungsform der Feder mehr von ihren Elasticitätsverhältnissen als von der Form der Stromcurve abhängen. Man könnte annehmen, dass die Vorrichtung die Phasendifferenz der Grundschwingungen gäbe, doch scheinen die Versuche des Verfassers im verzweigten Stromkreise „mit veränderlichem Widerstand des einen der beiden Stromkreise" dem zu widersprechen, indem dann die verschiedenen Abweichungen

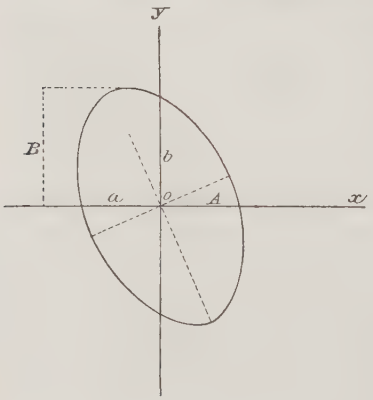


Fig. 6.

von den berechneten Werten bei verschiedener Phasendifferenz sich kaum erklären liessen.

Als Nachteile der Methode möchte ich daher anführen: die Bedingung, dass Stromstärke und Periode während der Dauer der Messung constant bleiben, dass die Federn auf die Wechselströme abgestimmt sein müssen, mithin nicht mit dem fertig aufgestellten Instrument bei beliebiger Tourenzahl gemessen werden kann; sodann die Umständlichkeit der Beobachtung, und endlich den Umstand, dass die Methode theoretisch nur für Sinusströme richtig ist.

3. Indicatormethoden.

Unter einer Indicatormethode bezeichne ich eine solche, die darin besteht, dass ein Indicator anzeigt, wann durch vom Beobachter oder auch automatisch hervorgerufene Veränderungen die zu messende Grösse in gewisse Beziehungen zu gegebenen Grössen getreten ist. Als Beispiel diene die Widerstandsmessung mit Hülfe der Wheatstone'schen Brücke. Als Indicator dient das Galvanometer, das anzeigt, wann der Beobachter drei Widerstände r_2, r_3, r_4 so verändert hat, dass die Unbekannte x die Proportion erfüllt

$$x : r_2 = r_3 : r_4.$$

Bei der Phasendifferenzenmessung liegt es in der Natur der Sache, dass zwei verschiedene Möglichkeiten vorhanden sind, indem 1. ein Stromanzeiger (Galvanometer) als Indicator dient, und 2. ein Phasenindicator, d. h. ein Instrument, das das Vorhandensein einer Phasendifferenz anzeigt.

Es soll nun im Folgenden eine Messungsmethode jeder Art beschrieben werden.

Die erste Art der Messung besteht darin, dass ein zu den Wechselströmen synchron laufendes Contactrad durch eine Schleiffeder, die um das Rad gedreht werden kann, bei jeder Umdrehung einmal für einen Augenblick den Stromkreis eines Galvanometers schliesst, das abwechselnd an je einen inductionsfreien Widerstand in den zu messenden Strömen angelegt werden kann. Es wird dann für jeden Strom eine bez. zwei Stellungen der Schleiffeder existieren, an welchen das Galvanometer keinen Ausschlag giebt,

indem gerade im Moment des Contactes der jeweilige Strom durch 0 geht.

Wird dann an einem Teilkreis diese Stellung der Feder für beide Ströme abgelesen, so giebt die Differenz direct die numerische Phasendifferenz in Graden nach der in der Einleitung gegebenen Definition, unabhängig von allen Eigenschaften des Stromes selbst. Hierbei kann das Contactrad direct auf die Axe der Wechselstrommaschine gesetzt werden, nur ist dann bei der Kreisteilung auf die Polzahl der Maschine Rücksicht zu nehmen.

Die zweite Art der Messung besteht darin, dass der eine der Wechselströme sich einen in der Phase verschobenen Strom induciert, welch letzterer in seiner Intensität solange verändert wird, bis beide zusammen in ihrer Wirkung addiert einem Strom gleichen, der dieselbe Phase hat, wie der zweite der Wechselströme. Dann lässt sich bei kleinen numerischen Werten die zeitliche Phasendifferenz beider Ströme direct angeben aus dem im secundären Stromkreis eingeschalteten Widerstand bei constantem gegenseitigen Inductionscoefficienten oder bei constantem Widerstand aus dem veränderlichen Inductionscoefficienten, unabhängig von den Strömen selbst; bei grösserer numerischer Phasendifferenz muss auf die Grösse der Periode Rücksicht genommen werden.

Bevor ich näher auf die Messungen eingehe, möchte ich noch kurz erwähnen, dass Herr Desider Corda[1]) eine etwas umständliche Methode angiebt, die darauf beruht, dass für einen sinusartigen Strom ein durch zwei gleiche Wechselströme erzeugtes Drehfeld während der Periode constant ist (dargestellt durch einen Kreis), wenn der Winkel α, unter dem die beiden Spulen stehen, die Bedingung erfüllt $\alpha = 180^0 - \varphi$. Bezeichnet nämlich J die Resultante des durch beide Ströme erzeugten magnetischen Feldes, so ist, wenn

$$i_1 = J_0 \sin p\,t, \quad i_2 = J_1 \sin (p\,t - \varphi) \text{ gesetzt,}$$

1) Desider Corda, Ueber die Verdoppelung der Periodenzahl und das Messen der Phasendifferenz von Wechselströmen. Electr.-techn. Zeitschr. p. 329 ff. 1893.

$$R^2 = C\{\sin^2 p\,t + \sin^2(p\,t-\varphi) + 2\sin p\,t\cos(p\,t-\varphi)\,.\cos\alpha\},$$

wenn C eine Constante ist.

Daraus folgt, dass R constant, also

$$\frac{dR}{dt} = 0,$$

wenn

$$2p\sin pt\cos pt + 2p\sin(pt-\varphi)\cos(pt-\varphi) + (2p\cos pt\sin(pt-\varphi) + 2p\sin pt\cos(pt-\varphi))\cos\alpha = 0$$

oder:

$$\cos\alpha = -\frac{\sin 2pt + \sin(2pt-2\varphi)}{\sin(2pt-\varphi)} = -\cos\varphi,$$

also $\alpha = 180^0 - \varphi$.

Krämer[1]) führt in seinem Buche an, dass das Drehmoment ein Maximum wird, wenn $\alpha = 180^0 - \varphi$, und beschreibt ein Instrument, das auf dieser Grundlage basiert; dies ist jedoch durchaus nicht der Fall. Es ist vielmehr für jede Phasendifferenz das Drehmoment ein Maximum, wenn $\alpha = 90^0$.

1. Methode.

Phasendifferenzenmessung mittels Galvanometer und Contactrad.

1. Apparate.

1. Zwei Wechselstromanker mit Hartgummikern liess ich nach meinen Angaben in der mechanischen Werkstätte des Prof. Dr. Edelmann herstellen; einen zweipoligen Feldmagnet für dieselben stellte mir die A. E. G. leihweise zur Verfügung. Die Anker waren von der gemeinsamen Axe abnehmbar und konnten gegeneinander verstellt werden, um eine beliebige Phasendifferenz herzustellen. Jeder hatte 2×700 Windungen eines 0,75 mm starken Drahtes, und lieferte bei 1500 bis 2000 Umdrehungen in der Minute 4 bis 6 Volt. 4 Schleifringe auf Hartgummi montiert, und Schleiffedern mit Klemmen gestatteten die Ströme getrennt abzunehmen. In beistehender Figur 7, 1 sind diese beiden Anker auf der Axe montiert.

2. Einen weiteren Anker (Fig. 7, 1 2) mit unterteiltem Eisenkern für dieselben Feldmagnete liess ich von der Firma A. Zettler, München, anfertigen. Derselbe konnte auf die-

1) Krämer, Der Drehstrom p. 350.

selbe Axe, wie die beiden Anker mit Hartgummikern gesetzt werden, trug 2×600 Windungen eines 0,70 mm starken Drahtes,

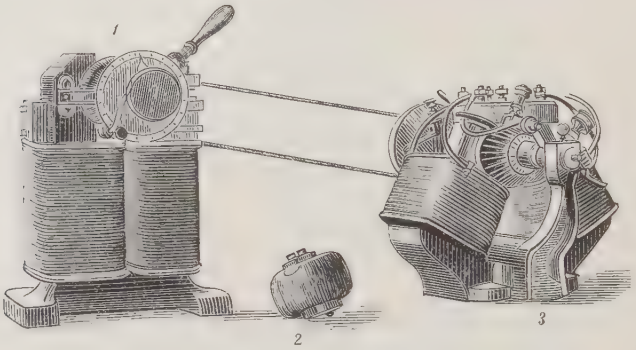


Fig. 7.

und lieferte 40 bis 70 Volt. Derselbe diente gleichzeitig als synchroner Wechselstrommotor.

3. Eine kleine Maschine (70 Volt, 4,5 Amp.) hatte die Firma C. & E. Fein in Stuttgart die grosse Liebenswürdigkeit, mir leihweise zur Verfügung zu stellen; von derselben (Fig. 7, 3) konnte Gleich-, Wechsel- und Drehstrom entnommen werden. Ich benutzte dieselbe als Gleichstrom-Wechselstrom bez. Gleichstrom-Drehstrom-Umformer einerseits, andererseits als Motor, um die Generatoren 1 und 2 zu treiben. Die Maschine hat sich vorzüglich bewährt, und kann ich für Laboratoriumszwecke bestens empfehlen.

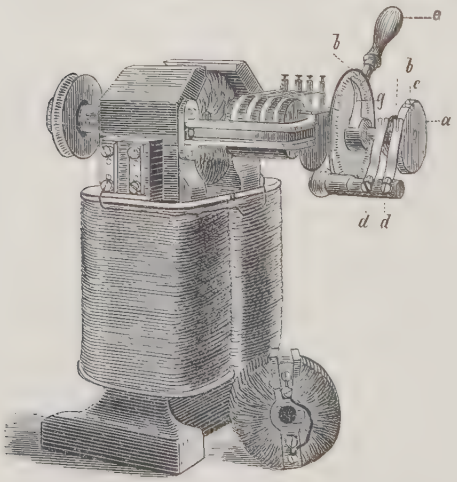


Fig. 8.

Der eigentliche Messapparat wurde auf der Axe der Anker 1, bez. 2 montiert und vom Institutsmechaniker ausgeführt. Derselbe ist in Fig. 8 zu erkennen.

Das Contactrad *a* aus Hartgummi besteht aus 2 Teilen.

Auf dem kleineren Umfang ist ein Schleifring (*b*) befestigt; derselbe ist mit einem 3 mm breiten Contactstück (*c*) aus Messing am grösseren Umfang leitend verbunden. Auf beiden Teilen des Rades schleifen Federn *d*, die mit Hülfe des Bürstenhalters *e* um die Axe gedreht werden können. Es wird demnach ein Stromkreis, in den die beiden Federn *d* eingeschaltet sind, bei jeder Umdrehung einmal geschlossen werden; wann im Laufe der Periode der Stromschluss stattfindet, hängt von der Stellung der Federn ab. Ein Teilkreis *f* am Bürstenhalter befestigt, und der Zeiger *g* erlauben die Stellung auf 0,2° genau abzulesen, bezogen auf einen willkürlichen Nullpunkt der Teilung. Bei genauerer Ausführung des Apparates müsste der Bürstenhalter mittels Mikrometerschraube genau einstellbar und die Stellung mittels Nonius ablesbar sein.

Als Galvanometer kann jeder beliebige Stromanzeiger verwandt werden: je schwächer die Ströme und je schmäler das Contactstück (*c*), desto empfindlicher muss dasselbe natürlich sein. Mir standen zwei Deprez-Galvanometer zur Verfügung aus der Werkstatt des Prof. Dr. Edelmann, München. Das eine hatte 645 Ω inneren Widerstand und gab bei einem runden Aufhängedraht aus Messing und vollkommen constantem Nullpunkt bei $1{,}6 \cdot 10^{-9}$ Amp. 1 mm Ausschlag bei 3 m Scalenabstand. Das zweite Galvanometer hatte 7,5 Ω inneren Widerstand bei einer entsprechend geringeren Empfindlichkeit. Den Galvanometern waren stets 5000 bis 15000 bez. 500 bis 2000 Ω inductionsfreien Widerstandes vorgeschaltet.

Hinzu kommen noch folgende Nebenapparate:

Ein Hitzdraht-Ampèremeter für Stromstärken bis 2 Amp. stellte mir die Firma Hartmann & Braun, Bockenheim bei Frankfurt a/M. bereitwilligst zur Verfügung. Widerstände aus Constantan-Draht von 0,864 und $2 \cdot 1{,}624$ Ω für Stromstärken bis 5 Amp., und ebensolche bis 200 Ω für 0,5 Amp. max. liess ich nach der Chaperon'schen Methode herstellen; dieselben wurden nicht abgeglichen, vielmehr stets eine gerade Anzahl ganzer Lagen hergestellt.

Endlich standen mir 2 Normalinductionsspulen[1], im Folgenden mit I und II bezeichnet, aus der Institutssammlung

1) Andriessen, Electr.-techn. Zeitschr. p. 170. 1896.

zur Verfügung; dieselben dienten dazu, berechenbare Phasendifferenzen herzustellen.

Allen denjenigen, die mir durch Ueberlassen der verschiedenen Apparate behülflich waren, sage ich an dieser Stelle meinen besten Dank.

2. Vorversuche.

Da die Normalinductionsspulen auf Holz gewickelt waren, war es möglich, dass dieselben ihren Selbstinductionscoefficienten mit der Zeit etwas geändert hatten, ich hielt es deswegen für notwendig, dieselben zu controllieren und führte die Messung nach der von Professor Himstedt[1] angegebenen Methode aus. Ich benutzte dazu einen Doppelunterbrecher des Instituts, der getrieben wurde von einem Electromotor, und bei jeder Umdrehung 8mal Galvanometer und Batterie schloss und öffnete; die Uhr, welche zur Bestimmung der Tourenzahl diente, wurde wiederholt mit einer Normaluhr verglichen.

Als Galvanometer verwandte ich zu diesen Zwecken dieselben, die oben angegeben sind, da das Arbeiten mit ballistischem Galvanometer gewöhnlicher Construction wegen der magnetischen Störungen im Institut geradezu unmöglich war. Es wurden Versuche angestellt bei verschiedenen Stromstärken (im Mittel 0,002 Amp.), verschiedenen Widerständen und Tourenzahlen.

Die Abweichungen der einzelnen Versuche betrug 0,1 bis 0,3 Proc. Als Mittelwerte erhielt ich:

Für Inductionsspule I: $L = 0{,}09340 \cdot 10^9$ cm, für II: $L = 0{,}03878 \cdot 10^9$ cm,
während früher
gemessen war: $L = 0{,}09292 \cdot 10^9$ cm, „ $L = 0{,}03882 \cdot 10^9$ cm,
Die Widerstände der
Spulen waren: $W = 19{,}89\ \Omega$, „ $W = 12{,}46\ \Omega$
bei 16° Celsius.

Ferner bestimmte ich die Spannungscurven der verschiedenen Wechselstromgeneratoren; dieselben sind in der Tafel durch Curve I bis III dargestellt. Die Curven I bis V erhielt ich dadurch, dass ich an einen der Schleifringe des Stromabnehmers einen

1) F. Himstedt, Ueber die Bestimmung von Selbstinductionscoefficienten von Drahtspulen, Wied. Ann. 54. p. 335. 1895.

seitlichen Ansatz anbringen und eine Schleiffeder über denselben schleifen liess. Dieselbe konnte mit Hülfe des drehbaren Bürstenhalters um die Axe gedreht werden, sodass der Contact zu den verschiedenen Zeiten der Periode stattfand; die jedesmalige Stellung des Bürstenhalters und dadurch der Moment des Stromschlusses im Laufe der Periode war an einem Teilkreis ablesbar. Die jeder Stellung entsprechenden constanten Ausschläge des Galvanometers, das mit einem inductionsfreien Widerstand von 100 000 Ω im äusseren Stromkreis lag, dienten direct als Maass der Spannung im Augenblicke des Contactes.

Die Curven VI und VII gehören der Maschine von C. und E. Fein an. Da ich an derselben keine Vorrichtung für einen verstellbaren momentanen Stromschluss anbringen konnte, liess ich von derselben meinen Anker mit Eisenkern synchron treiben. Die Vorrichtung zur Phasenmessung diente dann auch zur Aufnahme der Stromcurven; dabei wurden die Ausschläge des Galvanometers, das mit dem Phasenmesser in Serie an einen inductionsfreien Widerstand im Wechselstromkreis gelegt war, bei Stellungen des Phasenmessers von 10^0 zu 10^0 beobachtet.

Die Curven I und IV, welche den Verlauf der Spannung der Anker ohne Eisenkern wiedergeben, sollten möglichst angenäherte Sinuscurven sein. Die Zeichnung zeigt jedoch, dass dieselben nicht unbedeutende Abweichungen aufweisen. Ich versuchte durch Anbringen von Eisenbrücken an passenden Stellen der Feldmagnete die Spannungscurve der Sinuscurve noch mehr zu nähern, jedoch mit negativem Resultat. Die Curven II und III sollen zeigen, wie die Spannungscurve im geschlossenen Stromkreis sich verändert, wenn Spulen mit Eisenkern in demselben vorhanden.

Erwähnt sei an dieser Stelle noch, dass die Ausdehnung des Contactstückes *c* am Phasenmesser keinen schädlichen Einfluss ausübt, solange der Stromkreis des Galvanometers nahezu selbstinductionsfrei bleibt; das Galvanometer bleibt vielmehr auf 0, wenn während der ganzen Dauer des Contactes ebensoviel positive wie negative Electricität dasselbe durchfliesst.

3. Versuche mit dem Phasenmesser.

a) Prüfung der Messmethode.

Bei den folgenden Versuchen wurde der Wechselstrom dem eisenfreien Anker II entnommen, da derselbe, wie die Aufnahme der Stromcurven erkennen lässt, am angenähertsten harmonisch verlaufenden Strom liefert.

Der Phasenmesser war an dem Wechselstromgenerator selbst montiert, sodass das Contactrad an und für sich synchron zu dem Strom laufen musste.

Zunächst wurde die Selbstinduction des Ankers mit dem Phasenmesser selbst bestimmt auf folgende Weise (vgl. Schal-

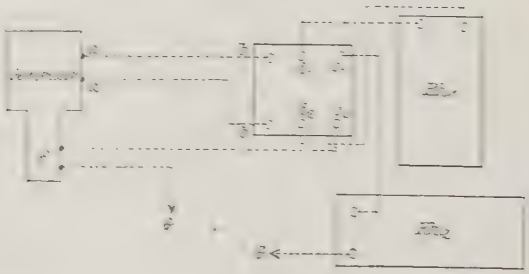


Fig. 9.

tungsschema Fig. 9), in welchem der Galvanometerschlüssel fortgelassen. Zuerst geht der Wechselstrom vom Generator über $a\,a$, $b\,b$ nach $c_1\,c_2$ und durchläuft von hier aus den Rheostaten $Rh\,2$ mit 100000 Ω, das Galvanometer G und den Phasenmesser f, durch den er während jeder Periode einmal geschlossen wird. Hierbei war es nötig, die Schleiffeder des Phasenmessers auf 297,4° zu stellen, damit das Galvanometer keinen Ausschlag gab. Sodann wurde c_1 mit d_1, c_2 mit d_2 durch Einsetzen eines Bügels verbunden, sodass jetzt der Strom über $b\,b$, $c_1\,c_2$, $d_1\,d_2$ den Rheostaten 1 mit 4 Ω durchfloss, während an letzterem der Stromkreis $Rh\,2$ mit 5000 Ω, Galvanometer G und Phasenmesser f im Nebenschluss lag. Jetzt musste der Phasenmesser auf 303,0° gestellt werden, damit das Galvanometer in Ruhe blieb.

Daraus folgt, dass der durch 4 Ω geschlossene Strom um 5,6° in der Phase gegen die Spannung des Generators verschoben ist, indem nämlich die 100000 Ω als unendlich gross angesehen werden können. Lege ich daher unter Annahme eines völligen Sinusstromes die Formel zu Grunde

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{L}{R},$$

wo L Selbstinductionscoefficient, R Gesammtwiderstand des geschlossenen Stromkreises, T die Periode des Stromes bedeutet, so erhalte ich, indem gemessen war

$$T = 0{,}0458 \text{ Sec.}, \quad R = 9{,}43\ \Omega, \quad \operatorname{tg}\ 5{,}6^0 = 2\pi\ \frac{L}{0{,}0458 \,.\, 9{,}43}$$

und daraus

$$L = 0{,}00674 \,.\, 10^9 \text{ cm}.$$

Derartig wurde eine Reihe von Versuchen angestellt bei verschiedener Tourenzahl und Widerstand. Da letzterer durch Temperaturänderungen ständigen Schwankungen unterworfen war, wurde die Schaltung später so angeordnet, dass der Widerstand mittels Wheatstone'scher Brücke und demselben Galvanometer, das zur Phasenmessung diente, nur durch Umlegen zweier Commutatoren sofort nach jeder Messung bestimmt werden konnte.

Die einzelnen Messungen gaben Abweichungen von einigen Procenten, die sich teilweise aus den Ablesefehlern bei der Bestimmung der geringen Phasendifferenz, teilweise aus der Capacitätswirkung der 100000 Ω erklären lassen. Als Mittel wurde gefunden

$$L = 0{,}0068 \,.\, 10^9 \text{ cm}$$

und dieser Wert den weiteren Untersuchungen zu Grunde gelegt.

Darauf wurde in den Stromkreis ausser einem inductionsfreien Widerstand noch die Normalinductionsrolle I eingeschaltet und in ganz analoger Weise die Phasendifferenz zwischen der electromotorischen Kraft des Generators und des Stromes ermittelt bei verschiedener Tourenzahl und Widerstand.

So erhielt ich z. B. für

$$L = 0{,}0934 + 0{,}0068 \quad R = 30{,}5\,\Omega, \quad T = 0{,}0413 \text{ Sec} \quad \varphi = 27.2^0.$$

während man aus der Formel

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \pi L}{T . R}$$

erhält:

$$\varphi = 26{,}7^0.$$

Bei einem anderen Versuche war $L = 0{,}1002$, $R = 35{,}5\ \Omega$, $T = 0{,}076$ Sec. und ich erhielt $\varphi = 13{,}6^0$; dagegen aus L, R, T berechnet: $\varphi = 13{,}2^0$.

Auch fernere Versuche ergaben, dass der gemessene Wert stets grösser war als der berechnete. Diese Erscheinung konnte zunächst nicht erklärt werden, findet jedoch weiter unten ihre Begründung.

Um von der Selbstinduction des Ankers unabhängig zu sein wurden weitere Versuche mit verzweigtem Stromkreis angestellt.

Ist in dem einen Stromkreis der Selbstinductionscoefficient L_1, der Widerstand R_1, in dem anderen L_2 bez. R_2, so ist bekanntlich die Phasendifferenz beider Stromkreise gegeneinander für harmonischen Wechselstrom:

wo

$$\varphi = \varphi'' - \varphi',$$

$$\operatorname{tg} \varphi'' = \frac{2 \pi}{T} \cdot \frac{L_2}{R_2}, \quad \operatorname{tg} \varphi' = \frac{2 \pi}{T} \cdot \frac{L_1}{R_1}.$$

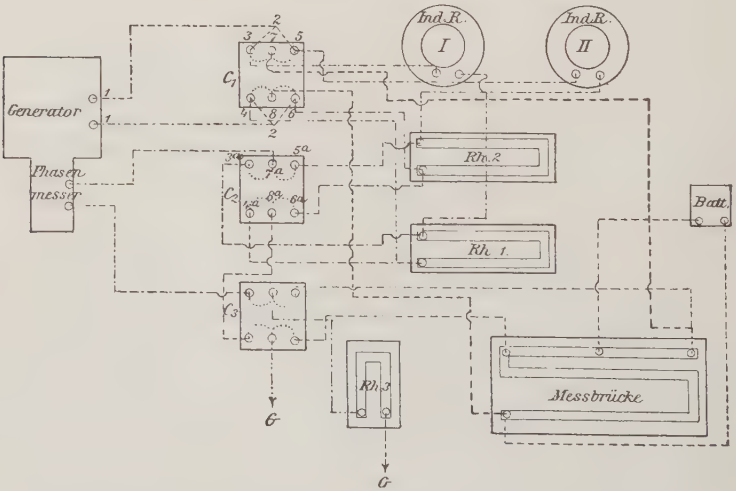


Fig. 10.

Auch hier wurde die Schaltung so angeordnet, dass stets nach jedem Versuch der Widerstand beider Stromkreise gemessen

werden konnte. Das hierdurch ziemlich complicierte Schaltungsschema (vgl. Fig. 10) füge ich hier bei.

In demselben sind die ·—·— Leitungen vom Wechselstrom durchflossen, die ——— dienen zur Widerstandsmessung, die —··—·· sind die beiden Messungen gemeinsamen Galvanometerleitungen; C_1, C_2, C_3 sind Commutatoren. Bei der Phasenmessung geht der Wechselstrom von 1, 1 nach 2 Kupferbügeln 2, 2, die in die vier äusseren Quecksilbernäpfe 3, 4, 5, 6 des Commutators C_1 eingelegt sind.

Hier verzweigt sich der Strom: Der eine Teil geht von 3 über die Normalinductionsrolle I, Rheostat 1 nach 4, der andere von 5 über Inductionsrolle II, Rheostat 2 nach 6.

Um die Phasendifferenz dieser beiden Zweigströme zu messen, ist ein Nebenschluss zum Rheostaten Rh_1 mit den Quecksilbernäpfen 3^a, 4^a, zum Rheostaten Rh_2 mit 5^a, 6^a des Commutators C_2 verbunden; beide Nebenschlüsse können abwechselnd an 7^a, 8^a gelegt werden, von welchen Punkten aus der Strom über den Phasenmesser und Commutator C_3 zum Galvanometer geht. Letzterem ist der Rheostat Rh_3 vorgeschaltet; der Galvanometerschlüssel ist in der Zeichnung fortgelassen. Bei der Widerstandsmessung braucht nur der Commutator C_3 umgelegt zu werden, um das Galvanometer mit der Messbrücke zu verbinden; ferner müssen die Kupferbügel 2, 2 entfernt werden. Verbindet man dann 3, 4 oder 5, 6 mit 7, 8, so liegt die erste bez. zweite Zweigleitung als vierter unbekannter Widerstand an der Messbrücke, für die ein galvanisches Element den Strom liefert.

Mit Hülfe dieser Schaltung wurde eine grössere Reihe von Versuchen ausgeführt, bei denen teilweise die Normalinductionsrolle II entfernt war, sodass der zweite Zweigstrom keine Selbstinduction hatte.

So war z. B.

$$L_2 = 0, \quad L_1 = 0{,}0934, \quad R_1 = 35{,}99, \quad T = 0{,}0511.$$

Hierbei musste für den ersten Zweigstrom der Phasenmesser auf $317{,}9^0$, nach Umlegen des Commutators 2 für den zweiten Zweigstrom auf $298{,}9^0$ gestellt werden, damit das Galvanometer keinen Ausschlag gab. Mithin ergiebt sich als Phasendifferenz

beider Ströme gemessen 19,0°; aus obigen Daten unter Annahme eines Sinusstromes dagegen berechnet 17,8°.

Folgende Tabelle giebt für 7 Versuche die gemessenen und berechneten Werte:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7
gemessen	9,9	17,1	19,0	28,0	31,3	45,7	53,7
berechnet	9,1	16,2	17,8	26,4	30,2	45,3	53,5
Differenz	0,8	0,9	1,2	1,6	1,1	0,4	0,2

Man erkennt, dass durchweg die gemessenen Werte grösser sind als die berechneten. Die Differenz, welche bis zu 7 Proc. ausmacht, nimmt zu, bis $\varphi = 25^0$ wird, dann wieder ab, und verschwindet für $\varphi = 50^0$ fast ganz. Dieses Anwachsen und Fallen der Differenz liessen mich vermuten, dass dieselbe von der geringen Abweichung meines Wechselstromes von der Sinuscurve herrühren könne. Um hierüber Gewissheit zu erlangen, entwickelte ich die im ersten Teil gegebene Formel für die Phasendifferenz des Stromes gegenüber der electromotorischen Kraft bei angenähertem Sinusstrom und berechnete aus der für den Anker erhaltenen Spannungscurve IV die Formel derselben. Durch den Verlauf der Curve sowohl, als durch eine Ueberschlagsrechnung erkannte ich zunächst, dass das 5. und 7. Glied der Sinusreihe besonders hervortreten; ich setzte daher als Formel der Curve an:

$$E = E_1 \sin p\,t + E_5 \sin 5\,p\,t + E_7 \sin 7\,p\,t,$$

und erhielt aus 6 Punkten nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, als angenäherte Formel meiner Spannungscurve von 0 bis 50°:

$$E = 148{,}5 \sin p\,t - 2{,}6 \sin 5\,p\,t - 4{,}4 \sin 7\,p\,t$$

oder durch E_1 dividiert:

$$E = \sin p\,t - 0{,}0174 \sin 5\,p\,t - 0{,}0295 \sin 7\,p\,t,$$

wo E in willkürlichem Maasse gemessen ist.

Die so berechnete Formel kann nur als grobe Annäherung betrachtet werden, indem die Aufnahme der Curve kaum genauer als auf 1 Proc. richtig sein kann, und nur ganz geringe Veränderungen derselben die Formel wesentlich beeinflussen.

Aus dieser Gleichung wurden sodann die Werte $\varepsilon = \varphi - \varphi_1$ nach der Formel (17) berechnet für vier verschiedene Werte von φ_1, und erhalten:

φ_1	10^0	20^0	30^0	40^0
ε	$+0{,}5^0$	$1{,}0$	$0{,}7$	$0{,}2$

Man erkennt, dass die berechneten Differenzen zwischen der Phasendifferenz für harmonischen Strom und den von mir verwandten Strom zwar etwas kleiner sind, als die gemessenen; jedoch steigen und fallen sie ebenso mit wachsendem φ. Hieraus und aus dem Umstande, dass die gemessenen Differenzen ebenfalls nur abhängen von der Grösse

$$\varphi \text{ bez. } p\frac{L}{R},$$

nicht aber von p, L, R einzeln, glaube ich annehmen zu können, dass obige Differenzen lediglich bedingt sind durch die geringe Abweichung der Spannungscurve von der Sinusform.

Mithin ist experimentell bewiesen, dass die Methode thatsächlich die Phasendifferenz zweier Wechselströme nach der im ersten Teil gegebenen Definition zu messen gestattet und die scheinbaren Abweichungen mit den theoretisch gefundenen Werten in der Ungenauigkeit der Rechnung ihren Grund haben.

b) Einige Messungen mit Hülfe der Methode.

Für die folgenden Versuche vertauschte ich den auf Hartgummi gewickelten Anker mit dem mit unterteiltem Eisenkern und trieb denselben als synchronen Wechselstrommotor mit dem Wechselstrom der Maschine von C. & E. Fein; die Feldmagnete meines Motors wurden durch Gleichstrom erregt. Natürlich kann statt eines synchronen Wechselstrommotors jede andere Einrichtung benutzt werden, die eine mit dem Strom synchrone Umdrehung hervorbringt.

Es zeigten sich anfangs Schwierigkeiten den Motor zum Anlaufen zu bringen; durch starke Schwächung der Stromstärke in den Feldmagneten konnte es jedoch dahin gebracht werden, dass beide Maschinen gleichzeitig anliefen. Bei ruhigem Gang blieb dann die Stellung des Motorankers zur Phase des Stromes nahezu stationär, sodass bis auf $0{,}2^0$ bis

0,4° genau die Phase abgelesen werden konnte. Schwankungen in der Tourenzahl des Generators folgte der Motor sehr schnell; nur bei sehr plötzlichen Veränderungen fiel er ausser Takt und blieb stehen.

Zu bemerken ist noch, dass bei der Phasenmessung darauf geachtet werden musste, dass stets die Nullpunkte verglichen wurden, bei denen der Strom im selben Sinne durch 0 geht.

Bei der unregelmässigen Stromcurve lagen nämlich die beiden Nullpunkte nie genau um 180° voneinander entfernt, sodass nicht vom einen Nullpunkt auf die Lage des anderen geschlossen werden konnte.

Ich führte zunächst Versuche aus mit 3 verketteten Wechselströmen der Maschine von C. & E. Fein. In jeden der 3 Ströme wurde ein kleiner inductionsfreier Widerstand aus Constantandraht für Ströme bis 5 Amp. eingeschaltet, an welche der Reihe nach mittels eines Doppelcommutators Phasenmesser und Galvanometer mit passendem Vorschaltwiderstand in Nebenschluss gelegt werden konnte.

Der Generator hatte 4 Klemmen zur Stromabnahme, 1 bis 3 für verketteten Drehstrom, 1 und 4 für einfachen Wechselstrom.

Ich entnahm zunächst den Klemmen 1, 2, 3 Strom und legte in die Leitung 1 den Motor und in 2 eine eisenfreie Inductionsspule mit 20 Ω Widerstand, während die 3. Leitung als gemeinsame Rückleitung unbelastet blieb.

Es ergab sich, dass das Galvanometer in Ruhe blieb, wenn der Phasenmesser bei dem

1. Stromkreis auf 326°,
2. „ „ 296°,
3. „ „ 118,5°

stand. Demnach ist die Phasendifferenz zwischen

1 und 2: $\varphi_{12} = 30°$,
2 „ 3: $\varphi_{23} = 177{,}5°$,
3 „ 1: $\varphi_{31} = 152{,}5°$,

Sodann entnahm ich den Strom den Klemmen 1, 2, 4; legte an 4 den Motor, an 2 dieselbe Inductionsspule; die Leitung 1 blieb unbelastet.

Dabei erhielt ich Phasendifferenz zwischen

$$\begin{aligned} 1 \text{ und } 2&: \varphi_{12} = 171^0 \\ 2 \;\;,,\;\; 4&: \varphi_{24} = 63^0 \\ 4 \;\;,,\;\; 1&: \varphi_{41} = 126^0 \end{aligned}$$

Legte ich dagegen an 2 eine Spule mit grober Wickelung (c. 5 Ω) mit Eisenkern, während sonst alles unverändert blieb, so erhielt ich:

$$\varphi_{12} = 170{,}2^0, \quad \varphi_{24} = 115{,}2^0, \quad \varphi_{41} = 74{,}6^0.$$

Aus diesem Versuch erkennt man, wie die Phasendifferenz der 3 Ströme sich bei verschiedener Belastung verändert.

Ferner untersuchte ich die Phasendifferenz der primären und secundären Spule eines kleinen Transformators, indem ich den Motor mit dem einen Drehstrom trieb, den zweiten durch die primäre Spule schickte und den dritten als Rückleitung verwandte. Die secundäre Transformatorspule war durch 150 Ω inductionsfrei geschlossen. Ich erhielt für den Transformator

$$\begin{aligned} \text{ohne Eisenkern } &\varphi = 80^0 \\ \text{mit } \;\;,, \;\; &\varphi = 114^0 \end{aligned}$$

Bei analoger Schaltung erhielt ich für die Phasendifferenz des primären und secundären Stromes eines Funkeninductors

$$\varphi = 162{,}5^0$$

oder, indem ich den secundären Strom commutierte, $\varphi = 21^0$. Beidemal hat natürlich φ verschiedenes Vorzeichen.

Daraus, dass beide Werte zusammen nicht 180^0 ergeben, ersieht man, dass die Stromcurven einen unsymmetrischen Verlauf haben.

Von weiteren diesbezüglichen Versuchen wurde abgesehen, da bei der überaus unregelmässigen Stromcurve jede Controlle unmöglich war.

c) Selbstinductionsbestimmung durch Phasenmessung.

Schliesslich führte ich noch eine Versuchsreihe aus, die zeigen soll, wie man Phasendifferenzenmessung zur Bestimmung von Selbstinductionscoefficienten verwenden kann. Ich wählte dazu die Bestimmung der Abhängigkeit des Selbstinductionscoefficienten von der Stromstärke in einer Inductionsspule mit festem Eisenkern.

Zunächst versuchte ich den Strom der Maschine von Fein zu diesem Zwecke zu benutzen; doch kam ich wegen der zu starken Unregelmässigkeit der Stromcurve zu keinem Resultate. Ich verwandte daher den Anker mit Eisenkern als Generator.

Die Messung wurde im verzweigten Stromkreise angestellt, indem in dem einen Stromkreis ein inductionsfreier Widerstand, in dem anderen die Spule mit Eisenkern und ein bekannter Widerstand eingeschaltet war. Die Phasendifferenz beider Zweigströme lässt dann bei gegebener Tourenzahl den Selbstinductionscoefficienten der Spule berechnen. Um diese Rechnung nach der einfachen Formel

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{L}{R}$$

ausführen zu können, ist es jedoch nötig, die erhaltenen Phasendifferenzen auf solche für Sinusstrom zu reducieren. Zu diesem Zwecke wurde nach der Messung statt der Inductionsrolle, deren veränderlicher Inductionscoefficient bestimmt werden sollte, eine der Normalrollen eingeschaltet, und die Widerstände so gewählt, dass ich nahezu dieselbe Phasendifferenz erhielt, wie vorher. Auf diese Weise konnte ermittelt werden, wie gross die Differenz der gemessenen und thatsächlich vorhandenen Phasendifferenz zu der für Sinusstrom gültigen ist.

Die Verzerrung der Stromcurve durch die Hysteresis des Eisens blieb dabei allerdings unberücksichtigt, indem angenommen wurde, dass in beiden Fällen die Stromcurve nicht wesentlich verschieden verlief.

Die Stromstärke wurde mittels eines Torsions-Dynamometers für Schwachstrom, das an einen kleinen inductionsfreien Widerstand angelegt wurde, gemessen.

Die gemessenen Phasendifferenzen lagen bei den gewählten Widerständen und Tourenzahl zwischen 32,3° und 37,0°; die Correction ε für Sinusstrom schwankte in diesem Intervall zwischen 3,4° und 3,7°, indem die gemessenen Werte um 3,4 bis 3,7° grösser waren als die unter Annahme eines Sinusstromes aus Selbstinduction und Widerstand berechneten.

Es wurde daher zur Berechnung der Selbstinduction der Spule mit Eisenkern von sämmtlichen Werten 3,6° als Mittel subtrahiert.

Folgende Tabelle giebt die Resultate, die in Fig. 4, Curve I der Tafel graphisch dargestellt sind. Es bedeutet φ reducierte Phasendifferenz, R Widerstand des Stromzweiges, in welchem die veränderliche Selbstinduction lag, T Periode des Wechselstromes, J Stromstärke, L der berechnete Selbstinductionscoefficient. Beim Versuche 0 ist der Eisenkern der Spule entfernt.

Nr.	φ	R	T	J	L
0	3,8	7,428	0,0381	—	0,00299
1	29,0	7,428	0,0381	0,136	0,0250
2	30,4	7,430	0,0379	0,184	0,0263
3	31,8	7,436	0,0377	0,239	0,0277
4	33,1	7,436	0,0383	0,384	0,0295
5	33,6	7,440	0,0389	0,492	0,0306
6	33,2	7,447	0,0399	0,677	0,0310
7	32,4	7,585	0,0403	1,335	0,0309
8	31,8	7,664	0,0405	1,750	0,0307
9	32,2	7,720	0,0408	1,980	0,0315

Man erkennt, wie der Selbstinductionscoefficient bei schwachen Strömen stark wächst mit der Stromstärke, dann aber nahezu constant bleibt. Die Gerade Ia giebt den constanten Wert vom Selbstinductionscoefficient an, wenn der Eisenkern aus der Spule entfernt ist. Unter der Annahme, dass alle magnetischen Kraftlinien vom Eisen aufgenommen sind, giebt die Curve I gleichzeitig die magnetische Permeabilität des Eisenkerns an, wenn der Wert der Ordinate von Ia als Einheit genommen wird.

Fassen wir die Resultate zusammen, so erkennt man, dass die Methode gestattet, jede beliebige numerische Phasendifferenz beliebiger Wechselströme unabhängig von den Eigenschaften jedes einzelnen Stromes auf ca. $0{,}1^0$ oder genauer zu messen, wenn der Apparat direct an dem Wechselstromgenerator angebracht werden kann, auf ca. $0{,}3^0$ genau, wenn derselbe durch einen Synchronmotor getrieben wird.

Phasendifferenzen sehr schneller Schwingungen, z. B. Condensatorentladungen zu messen ist mittels dieser Methode nicht möglich; auch giebt sie für sehr kleine Phasendifferenzen

nur ungenaue Werte. Bei der Anwendung zur Selbstinductionsbestimmung verlangt sie ausserdem eine Zeitmessung und eine Reduction auf Sinusstrom, sobald mit beliebigem Wechselstrom gearbeitet wird.

---

2. Methode.

Phasendifferenzenmessung mittels Phasenindicator.

1. Theoretische Begründung.

Es sollen zunächst zwei harmonisch verlaufende Ströme angenommen werden. Wird dann die Zeit gemessen von einem Augenblicke an, in welchem der eine durch 0 geht, so sind dieselben gegeben durch:

$$i_1 = J_1 \sin \frac{2\pi}{T} t, \qquad i_2 = J_2 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi \right),$$

durchläuft i_1 die primäre Wickelung eines eisenfreien Inductoriums, so erzeugt er in der secundären Wickelung eine electromotorische Kraft

$$e = L \frac{di_1}{dt},$$

wenn mit L der gegenseitige Inductionscoefficient verstanden wird.

Ist dann der Widerstand des secundären Stromkreises R_3, während seine Selbstinduction zunächst unberücksichtigt bleiben soll, so durchfliesst denselben ein Strom i_3, für den gilt

$$i_3 = \frac{L}{R_3} \cdot p \cdot J_1 \cos pt, \quad \text{wo} \quad p = \frac{2\pi}{T}.$$

Stelle ich jetzt ein Drehfeld dar, derartig, dass i_1 und i_3 in derselben Ebene, i_2 in der dazu senkrechten Ebene einen drehbaren Metallkörper umkreisen, so wird auf letzteren kein Drehmoment ausgeübt werden, wenn $i_1 + i_3$ dieselbe Phase haben wie i_2, mithin wenn die Gleichung erfüllt ist:

$$J_1 \sin pt + \frac{L}{R_3} \cdot \frac{2\pi}{T} J_1 \cos pt = A \sin (pt + \varphi),$$

wo A eine Constante.

Hieraus folgt für $pt = -\varphi$:

$$J_1 \sin \varphi = \frac{L}{R_3} \cdot \frac{2\pi}{T} J_1 \cos \varphi \tag{20}$$

oder

(21) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{L}{R_3}.$$

In dieser Gleichung kommt die Stromstärke nicht vor, und es ist die Phasendifferenz bei gegebener Periode bestimmt durch L und R_3. Wird daher bei constantem gegenseitigen Inductionscoefficienten der Widerstand R_3 solange verändert, bis kein Drehmoment eintritt, so dient derselbe direct als Maass für φ; ebenso lässt sich bei constantem Widerstand R_3 durch Veränderung von L φ bestimmen.

Ist φ klein — kleiner als ca. 5^0 —, so lässt sich die Gleichung (21) vereinfachen.

Da nämlich in diesem Falle $\operatorname{tg}\varphi = \varphi$ gesetzt werden darf, so erhält man:

$$\frac{L}{R_3} = \frac{2\pi}{T} \cdot \varphi$$

oder, da

$$\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot \Theta,$$

wenn mit Θ die zeitliche Phasendifferenz beider Ströme bezeichnet wird,

(22) $$\Theta = \frac{L}{R_3}.$$

Aus Gleichung (22) geht hervor, dass Θ unabhängig von Wechselzahl und Stromstärke durch L und R_3 bestimmt ist, solange φ genügend klein.

Zusatz: Ist $\varphi < 10^0$, also $\Theta < \frac{1}{36} T$, so wird das Resultat auf 1 Proc. genau; bei kleinerem φ entsprechend genauer.

Bei dieser Untersuchung blieb die Selbstinduction des secundären Stromes unberücksichtigt; es bleibt daher zu untersuchen, wie weit dieselbe von Bedeutung ist.

Wird der Selbstinductionscoefficient mit L_3 bezeichnet, so ist der Strom i_3' durch die electromotorische Kraft

$$e = L p J_1 \sin\left(pt + \frac{\pi}{2}\right)$$

hervorgebracht:

$$i_3' = p \cdot L \cdot J_1 \frac{1}{R_3\sqrt{1 + \left(p\frac{L_3}{R_3}\right)^2}} \sin\left(pt + \frac{\pi}{2} - \psi\right)$$

und

$$\operatorname{tg}\psi = p\frac{L_3}{R_3}.$$

Mithin erhalte ich genau statt (20) die Bedingungsgleichung

$$(20\,a)\qquad J_1 \sin\varphi = p\cdot L\cdot J_1 \frac{1}{R_3\sqrt{1+\left(p\frac{L_3}{R_3}\right)^2}} \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}-\psi\right).$$

Es tritt demnach in (20) noch der Factor hinzu:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1+\left(p\frac{L_3}{R_3}\right)^2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi-\psi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(p\frac{L_3}{R_3}\right)^2}} \frac{\cos(\varphi+\psi)}{\cos\varphi}.$$

In diesem Factor ist $p = 2\pi/T$ enthalten. Es wird also die Aichungscurve, welche Θ aus R_3, bez. L bestimmt, nur solange von der Wechselzahl unabhängig bleiben, als k von der Einheit nicht wesentlich abweicht.

Um nun über die Grösse des Factors einen Anhalt zu bekommen, soll derselbe für einen bestimmten Fall berechnet werden.

Bei meiner ersten Versuchsreihe war $L_3 = 0{,}0015 \cdot 10^9$ cm. Sei ferner als ungünstigster Fall $\varphi = 10^0$ gewählt; ferner $T = 0{,}03$ Sec., also ca. 2000 Wechsel in der Minute, $R_3 = 10\ \Omega$, dann wird $k = 0{,}9948$.

Wird also der Factor k vernachlässigt, so würde in diesem Falle der Fehler ungefähr 0,5 Proc. ausmachen. Es erscheint demnach bei einer Genauigkeit des Resultates auf 0,5 Proc. die Vernachlässigung der Selbstinduction des secundären Leiters gestattet, solange

$$c = p\frac{L_3}{R_3} < 0{,}03\,.$$

Gehen wir jetzt von harmonischen Strömen zu solchen mit beliebigem Verlaufe über, so soll zunächst angenommen werden, dass die Stromcurven symmetrisch zur Nulllinie liegen, sich also in der Form (3) darstellen lassen. Rechne ich dann die Zeit vom Nullpunkte des einen Stromes an, so sind beide Ströme gegeben durch:

$$i_1 = \sum_1^\infty{}_\varkappa J_{1\varkappa} \sin \varkappa p t,$$

$$i_2 = \sum_1^\infty{}_\varkappa J_{2\varkappa} \sin \varkappa (p t + \varphi).$$

Dann induciert i_1 einen Strom i_3, der gegeben ist durch

$$i_3 = \frac{L}{R_3}\frac{di_1}{dt} = p\frac{L}{R_3}\sum_1^\infty \varkappa \cdot J_{1\varkappa}\cos \varkappa p t$$

und man hat statt (20) die Bedingungsgleichung:

$$\sum_1^\infty J_{1\varkappa}\sin \varkappa\varphi = \frac{L}{R_3}p\sum_1^\infty \varkappa \cdot J_{1\varkappa}\cos \varkappa\varphi$$

oder

$$\text{(20b)}\quad \left\{\begin{array}{c} J_{11}\sin\varphi + J_{12}\sin 2\varphi + \cdots \\ = \frac{L}{R_3}p\,\{J_{11}\cos\varphi + 2\cdot J_{12}\cos 2\varphi + \cdots\cdot\}; \end{array}\right.$$

soll hier wiederum

$$\operatorname{tg}\varphi = p\frac{L}{R_3}$$

sein, so ist dies nur möglich, solange man auch angenähert setzen kann:

$$\left.\begin{array}{l} J_{12}\operatorname{tg} 2\varphi - 2J_{12}\cdot p\frac{L}{R_3} = 0 \\ J_{13}\operatorname{tg} 3\varphi - 3J_{13}\cdot p\frac{L}{R_3} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right|$$

Dies ist aber mit grosser Annäherung der Fall, solange φ klein ist, indem zwar die Differenzen

$$\varepsilon_\varkappa = \operatorname{tg}\varkappa\varphi - \varkappa p\frac{L}{R_3}$$

mit wachsendem $\varkappa$ zunehmen, dagegen $J_{1\varkappa}\cdot\varepsilon_\varkappa$ durch Convergenz der Grössen $J_{1\varkappa}$ im allgemeinen stets von derselben Grössenordnung bleiben werden.

Diese Untersuchung gilt nun auch für nicht symmetrisch verlaufende Ströme, indem dieselben nach Gleichung (4) sich durch je zwei Gleichungen derselben Form darstellen lassen, also

$$i_1 = \sum_1^\infty J_{1\varkappa}\sin \varkappa p t \text{ für } (nT < t < (n+\tfrac{1}{2})T$$

$$= \sum_1^\infty J_{1\varkappa}\sin \varkappa p t \text{ für } (n+\tfrac{1}{2})T < t < (n+1)T$$

$$\left.\begin{aligned} i_2 &= \sum_{1}^{x} J_{2\varkappa} \sin \varkappa(pt+\varphi) \text{ für } (nT-\Theta)<t<(n+\tfrac{1}{2})T-\Theta \\ &= \sum_{1}^{x} J_{2\varkappa} \sin \varkappa(pt+\varphi) \text{ für } (n+\tfrac{1}{2})T-\Theta<t<(n+1)T-\Theta \end{aligned}\right\} \text{wo } \Theta = \frac{\varphi}{p}.$$

Da nun die Grösse φ in beiden Gleichungen von i_2 dieselbe ist, $J_{2\varkappa}$, bez. $J'_{2\varkappa}$ gar nicht in den Formeln vorkommen, so erhalte ich zwei Bedingungsgleichungen, die eine mit den Coefficienten $J_{1\varkappa}$, die andere mit $J'_{1\varkappa}$; für beide gilt dann obige Untersuchung, und man erhält genau ebenso für kleine Werte von φ

$$\operatorname{tg} \varphi = p \frac{L}{R_3}, \quad \text{bez.} \quad \Theta = \frac{L}{R_3}.$$

Bei diesen Untersuchungen (vgl. Fig. 11) wurde vorausgesetzt, dass stets das Drehmoment Null ist, wenn die Phasendifferenz Null. Um dies zu erkennen, stelle AB das durch i_1, AC das durch i_2 hervorgerufene magnetische Feld dar; $R = AD$ sei die Resultante beider Felder. Es ist dann das Drehmoment D in jedem Augenblick Null, wenn $< CAD = \alpha =$ Constans, also

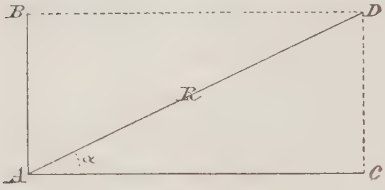


Fig. 11.

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0$$

ist. Für harmonische Ströme ist diese Bedingung durch $\varphi = 0$ erfüllt; es ist nämlich

$$\operatorname{tg} \alpha = \gamma \cdot \frac{i_1}{i_2},$$

wo γ eine Constante,

$$= \gamma \cdot \frac{J_1 \sin pt}{J_2 \sin(pt+\varphi)},$$

also muss sein:

$$\frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dt} = \frac{\gamma \cdot p \cdot J_1 \cdot J_2 \{\cos pt \sin(pt+\varphi) - \sin pt \cos(pt+\varphi)\}}{J_2^2 \sin^2(pt+\varphi)} = 0,$$

und daraus folgt $\sin \varphi = 0$, also $\varphi = 0$ oder $\varphi = 180^0$.

Sind beide Ströme von beliebigem aber gleichem Verlauf, so gilt dieselbe Bedingung, wie man sofort einsieht, da dann während der ganzen Periode $i_1/i_2 =$ Constans bleibt.

Sind die Stromcurven verschieden, aber beide symmetrisch zur Nullline, so wird sich α zwar in jedem Moment ändern, aber der Mittelwert

$$\frac{1}{T}\int_0^T a\,dt$$

constant bleiben, wenn $\varphi = 0$. Geben nämlich die beiden positiven Teile der Ströme zusammen ein Drehmoment in der einen Richtung, so geben die beiden negativen Teile ein gleiches Drehmoment in entgegengesetzter Richtung, sodass sich beide im Laufe einer Periode aufheben. Um dies zu erkennen diene nachstehende Fig. 12.

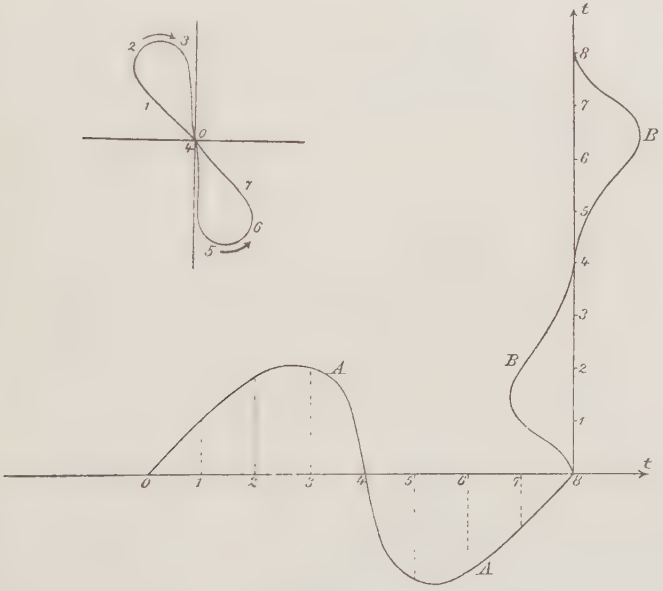


Fig. 12.

Die Curven A und B stellen die aufeinander senkrecht stehenden magnetischen Felder dar, wie sie durch die beiden Ströme i_1 und i_2 hervorgebracht werden; die Phasendifferenz ist Null. Im Punkte Null sind die denselben Zeiten entsprechenden Ordinaten der Grösse und Richtung nach aufgetragen und zu Resultanten vereinigt. Das magnetische Feld ist dann durch die Schleife dargestellt, deren beiden Teile gleich sein müssen, da die Curven symmetrisch zu den Nulllinien liegen. Durchlaufen wird die Schleife in der Richtung 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, also die obere Hälfte im Sinne des Uhrzeigers, die untere in

entgegengesetztem Sinne; demnach heben sich die Drehmomente auf und während der ganzen Periode ist der Mittelwert Null.

Aus der Fig. 12 erkennt man ferner, dass, wenn von den Strömen einer oder beide nicht symmetrisch verlaufen, die beiden Teile der Schleife verschieden gross werden, also demnach ein Drehmoment vorhanden ist, wenn $\varphi = 0$ ist; dasselbe wird dann verschwinden, wenn φ einen von Null etwas verschiedenen Wert hat. In diesem Fall giebt demnach die Messung einen etwas anderen Wert als Phasendifferenz, als wie in der Einleitung definiert wurde.

Fassen wir demnach die Resultate zusammen: Die Methode gestattet die Messung der zeitlichen Phasendifferenz unabhängig von Stromstärken, Wechselzahl und Stromcurve unter der Bedingung, dass

1. die zeitliche Phasendifferenz klein ist gegenüber der Periode;

2. die Stromcurven entweder gleich oder beide symmetrisch verlaufen.

Die Messung von numerischen Phasendifferenzen beliebiger Grösse gestattet die Methode unabhängig von den Stromstärken, aber abhängig von der Wechselzahl und der Form der Stromcurve.

Zur Messung von grossen Phasendifferenzen ist noch zu erwähnen:

1. Die Grösse L/R_3 kann praktisch nicht beliebig gross gewählt werden, indem man, um L zu vergrössern, auch stets R_3 vergrössern muss. Um trotzdem bis nahe zu 90° Phasendifferenzen messen zu können, braucht man nur an die primäre Wickelung des Phasenindicators einen Nebenschluss zu legen, sodass nur $1/n$ des ganzen Stromes i_1 dieselbe durchfliesst. Dann erhält man statt (20) die Bedingungsgleichung:

$$\frac{1}{n} J_1 \sin\varphi = \frac{L}{R_3} \cdot \frac{2\pi}{T} J_1 \cos\varphi \tag{20c}$$

und daraus

$$\operatorname{tg}\varphi = n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{L}{R_3}.$$

Durch genügend grosse Wahl von n ist dann bis nahe zu 90° die Messung möglich.

2. Die Messung der Phasendifferenzen bis zu 360° wird

dann durch Vertauschen der Ströme, Commutieren des primären oder secundären Stromes bez. durch beides zusammen erreicht.

3. Will man das Vertauschen der Ströme vermeiden, wenn die Phasendifferenz ihr Vorzeichen ändert, so muss man beide Ströme inducierend wirken lassen und beide inducierten Ströme zu ihren primären addieren; ist dann die Phasendifferenz positiv, so schliesst man den einen, wenn negativ, den anderen secundären Strom.

2. Apparate.

Zu den bereits bei der vorigen Messmethode beschriebenen Apparaten kommt hinzu der Phasenindicator.

Derselbe wurde nach meinen Angaben vom Mechaniker des Instituts hergestellt und ist in beistehender Fig. 13 abgebildet. Auf einem Grundbrett mit Stellschrauben und Hartgummiaufsatz sind zwei Spulen ineinander drehbar angebracht; die äussere aus Holz trägt zwei Wickelungen eines 0,5 mm starken Drahtes, die innere aus Hartgummi nur eine aus dem gleichen Draht. Innerhalb beider ist eine Hohlkugel aus reinem Silberblech gepresst, mittels Torsionskopf und Aufhängedraht aus Messing drehbar angebracht; dieselbe ist starr mit einem Spiegel verbunden, welcher gestattet, die Drehung der Kugel mittels Fernrohr und Scala abzulesen. Alle Teile in der Nähe der Drahtspulen sind aus Hartgummi angefertigt, um Störungen durch Inductionsströme in benachbarten Metallteilen zu vermeiden.

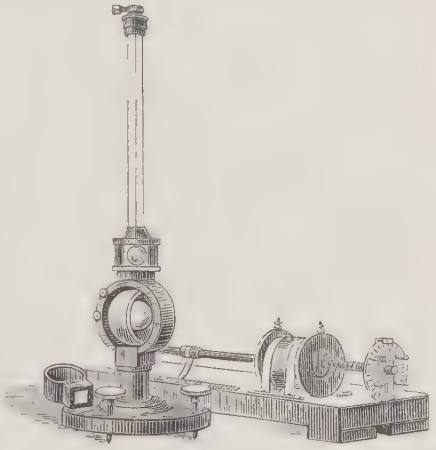


Fig. 13.

Eine Dämpfung ist nicht vorhanden, doch liesse sich leicht ein magnetischer Dämpfer anbringen, indem man eine

kleine Aluminiumscheibe mit der Silberkugel verbindet, und diese sich zwischen den Polen eines kleinen Stahlmagneten bewegen lässt.

Es zeigte sich anfangs, dass jeder Wechselstrom allein bereits eine kleine Drehung verursachte; der Grund wurde in einer geringen Unsymmetrie der Kugel gefunden; es konnte jedoch eine Stellung letzterer zu den Spulen gefunden werden, bei der keine Einwirkung eines einzelnen Wechselstromes zu merken war.

Bei der Aufstellung des Instrumentes wurde dafür Sorge getragen, dass sämmtliche Zuleitungen bifilar geführt waren, um gegenseitige Induction zu vermeiden. Die senkrechte Stellung beider Spulen wurde dadurch erreicht, dass durch die innere ein Wechselstrom von ca. 1 Amp. geschickt wurde; steht dann die äussere nicht senkrecht zu derselben, so wird in ihr beim Kurzschliessen ein zweiter Strom induciert, welcher mit dem ersteren zusammen eine Drehung verursacht. Auf diese Weise konnte die senkrechte Stellung der Windungsebenen beider Spulen sehr genau ermittelt werden.

Die Empfindlichkeit des Phasenindicators hängt natürlich von den Stromstärken und der numerischen Phasendifferenz ab. Bei meinem Apparat konnte bei Stromstärken von 1 Amp. eine Phasendifferenz von 2 Bogensecunden noch gut wahrgenommen werden.

Für sehr kleine Phasendifferenzen war ein bonderes Inductorium nicht nötig, indem die beiden Wickelungen der äusseren Spule bereits an und für sich inducierend aufeinander einwirken. Da hierbei der gegenseitige Inductionscoefficient nicht geändert werden konnte, musste die Messung durch Einschalten von Widerständen im secundären Strom vorgenommen werden.

Für grössere Phasendifferenzen hatte ich das in vorstehender Fig. 13 abgebildete Inductorium anfertigen lassen. Beide Spulen sind 64 mm lang; durch Drehen an der vorderen Torsionsscheibe konnte die innere Spule gegen die äussere feststehende verschoben werden. Die gegenseitige Stellung wurde mittels Zeiger und Scala am Grundbrett, die Bruchteile eines Millimeters an der Torsionsscheibe abgelesen; dabei diente als Nullpunkt die Stellung, in der die innere und äussere Spule sich genau deckten.

Die Widerstände R (nebst Zuleitungen) und Selbstinductionscoefficienten L der genannten Apparate waren folgende:

Innere Spule des Phasenindicators $R = 3{,}15\ \Omega$ $L = 0{,}00129 \cdot 10^9$ cm.

Aeussere Spule, primäre Wickelung des Phasenindicators $R = 3{,}65\ \Omega$ $L = 0{,}00148 \cdot 10^9$ cm.

Aeussere Spule, secund. Wickelung des Phasenindicators $R = 3{,}62\ \Omega$ $L = 0{,}00150 \cdot 10^9$ cm.

Gegenseitiger Inductionscoefficient der primären und secundären Wickelung:

$$L_{12} = 0{,}001439 \cdot 10^9 \text{ cm}.$$

Innere Spule des Inductoriums $R = 5{,}92\ \Omega$ $L = 0{,}00384 \cdot 10^9$ cm.

Aeussere „ „ „ $R = 19{,}04\ \Omega$ $L = 0{,}02912 \cdot 10^9$ cm.

Gegenseitiger Inductionscoefficient beider Spulen

$$L_{12} = 0{,}007068 \cdot 10^9 \text{ cm}.$$

Die Selbstinductionscoefficienten des Phasenindicators wurden nach der Methode von Prof. Himstedt bestimmt, ebenso, wie im vorigen Teil für die Normalinductionsrollen angegeben ist; nur zeigte sich hier eine Correction wegen der Selbstinduction der Rheostaten nötig. Die erhaltenen Werte sind auf ca. 2 Proc. genau.

Den gegenseitigen Inductionscoefficienten des Phasenindicators versuchte ich zunächst dadurch zu bestimmen, dass ich durch die eine Wickelung einen Strom von bekannter Stärke schickte und mit Hülfe eines Doppelunterbrechers die in der zweiten Wickelung inducierten Oeffnungsströme mittels Galvanometer maass. Finden n Stromunterbrechungen in der Secunde statt, ist J die Stromstärke des primären, E die inducierte electromotorische Kraft des secundären Stromkreises, so ist

$$L_{12} = \frac{E}{n \cdot J}.$$

Auf diese Weise fand ich $L_{12} = 0{,}001434$. Es zeigten jedoch die einzelnen Versuche Abweichungen bis zu 1 Proc.

Dann versuchte ich den Coefficienten durch einen einmaligen Inductionsstoss aus dem Dämpfungsverhältniss und der Schwingungsdauer meines Galvanometers zu bestimmen und fand den bedeutend grösseren Wert

$$L_{12} = 0{,}001502.$$

Ich verwarf daher beide Resultate und bestimmte den Coefficienten, wie in den folgenden Versuchen genauer an-

gegeben ist, mit Hülfe des Apparates selbst aus der Selbstinduction der Normalrollen.

Für das Inductorium erhielt ich ebenfalls abweichende Resultate aus beiden Versuchsreihen, nämlich

$$L_{12} = 0{,}006922 \quad \text{und} \quad L_{12} = 0{,}007154,$$

sodass auch dieser Coefficient mittels des Apparates selbst gefunden wurde.

Die Selbstinductionscoefficienten des Inductoriums sind nur mittels Phasenindicators gemessen worden.

3. Versuche.

Zur Bestimmung des gegenseitigen Inductionscoefficienten des Phasenindicators benutzte ich folgende Versuchsanordnung (vgl. Fig. 14). Der dem Anker mit Eisenkern entnommene Wechselstrom verzweigt sich an den Punkten a, b, indem er einerseits die innere Spule des Phasenindicators, den Widerstand W_1 und die Normalinductionsrolle NJR, andererseits die primäre äussere Spule und den Widerstand W_2 durchläuft.

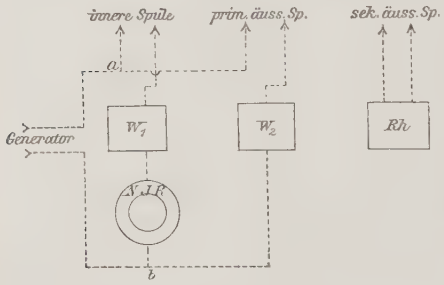


Fig. 14.

Die secundäre äussere Spule des Phasenindicators ist durch einen Präcisionsrheostaten Rh geschlossen. Im Stromkreis der primären äusseren Spule war noch ein Commutator vorhanden, um im Phasenindicator Ausschläge nach beiden Seiten erhalten zu können.

Bei dem ersten Versuche wurde gewählt:

Selbstinductionscoefficient des ersten Zweigstromes, der sich zusammensetzt aus dem der Normalinductionsrolle und dem des Phasenindicators:

$$L_1 = 0{,}03878 + 0{,}00129 = 0{,}04007 \,.\, 10^9 \,\text{cm},$$

Gesammtwiderstand:

$$R_1 = 286{,}3\ \Omega,$$

Selbstinductionscoefficient des zweiten Zweigstromes

$$L_2 = 0{,}00148 \,.\, 10^9 \text{ cm},$$

Gesammtwiderstand

$$R_2 = 166{,}33.$$

Daraus berechnet sich die zeitliche Phasendifferenz beider Zweigströme:

$$\Theta = \frac{L_1}{R_1} - \frac{L_2}{R_2} = 0{,}0001311 \text{ Secunden}.$$

In dem Rheostaten wurden 7,37 Ω gezogen, damit der Phasenindicator keinen Ausschlag gab, mithin war der Gesammtwiderstand R_3 des secundären Stromkreises

$$R_3 = 7{,}37 + 3{,}62 = 10{,}99 \ \Omega.$$

Daraus ergiebt sich der verlangte gegenseitige Iuductionscoefficient:

$$L_{12} = R_3 \,.\, \Theta = 0{,}001440;$$

ein Wert, der nur sehr wenig abweicht von dem oben zuerst gefundenen.

Bei dieser Anordnung tritt die Selbstinduction des Phasenindicators nur als Correctionsglied auf, braucht daher nicht genau bekannt zu sein. Man könnte dieselbe dadurch bestimmen, dass man sie zunächst ganz unberücksichtigt lässt und aus dem so angenähert gefundenen Werte von L_{12} mit dem Apparat selbst beide Coefficienten aus zwei Versuchen bestimmt.

Bei der Berechnung von Θ konnten die einfachen für harmonische Ströme geltenden Formeln zu Grunde gelegt werden, da nach Gleichung (16) für kleine Phasendifferenzen diese unabhängig von der Stromcurve werden.

Weitere 3 Versuche wurden mit folgenden Werten angestellt:

	1	2	3
L_1	0,04007	0,04007	0,04007
R_1	345,9	253,60	229,48
L_2	0,00148	0,00148	0,00148
R_2	106,77	159,0	183,12
$10^3 \,.\, \Theta$	0,1020	0,1487	0,1665
R_3	14,12	9,67	8,63
$10^2 \,.\, L_{12}$	0,1440	0,1438	0,1437

daraus ergab sich als Mittelwert $L_{12} = 0{,}001439 \,.\, 10^9$ cm.

Bei diesen Versuchen lag die Tourenzahl zwischen 900 und 1400 Wechsel in der Minute, sodass die numerische Phasendifferenz bei allen Versuchen kleiner war als $1{,}5^0$.

Die Stromstärke lag zwischen 0,1 und 0,3 Amp. Veränderungen der Tourenzahl und Stromstärke hatten auf die Versuche keinen Einfluss.

Aus der guten Uebereinstimmung der einzelnen Versuche erkennt man, dass die Methode gestattet sehr kleine Phasendifferenzen auf ca. 0,3 Proc. genau zu messen.

Durch weitere Versuche bestimmte ich die Selbstinductionscoefficienten des Inductoriums.

Zunächst legte ich die äussere Spule in den ersten Zweigstrom und wählte:

$$R_1 = 182{,}7\ \Omega,\ R_2 = 203{,}8\ \Omega,\ L_2 = 0{,}00148;$$

im Rheostaten mussten gezogen werden $5{,}40\ \Omega$, also war die Phasendifferenz beider Zweigströme:

$$\Theta = \frac{0{,}001439}{5{,}40 + 3{,}62} = 0{,}0001595\ \text{Sec.}$$

Daraus ergiebt sich die Phasenverschiebung, die der erste Zweigstrom hervorbringt:

$$\Theta_1 = \Theta + \frac{L_2}{R_2} = 0{,}0001667\ \text{Sec.},$$

also der Selbstinductionscoefficient desselben

$$R_1 \,.\, \Theta_1 = 0{,}03046;$$

daraus schliesslich durch Subtraction des Coefficienten der betreffenden Spule des Phasenindicators erhält man als Selbstinductionscoefficient der äusseren Spule des Inductoriums:

$$L = 0{,}03046 - 0{,}00129 = 0{,}02917 \,.\, 10^9\ \text{cm}.$$

Für die innere Spule des Inductoriums wurde gemessen in analoger Weise $\Theta = 0{,}0000541$ Sec. und aus den Widerständen berechnet $L = 0{,}00384 \,.\, 10^9$ cm.

Nachdem die Selbstinductionscoefficienten des Inductoriums bekannt waren, konnte der gegenseitige Inductionscoefficient ebenso, wie für den Phasenindicator bestimmt werden, indem die äussere Spule des Inductoriums mit dem primären, die

innere mit dem secundären Stromkreis des Phasenindicators in Serie gelegt war. Ich erhielt aus 4 Versuchen die Resultate:

	1	2	3	4
R_3	18,71	23,84	.41,94	72,94
$10^3 . \Theta$	0,4527	0,3562	0,2031	0,1172
$10^2 . L_{12}$	0,7031	0,7053	0,7079	0,7110

daraus ergab sich als Mittelwert $L_{12} = 0{,}007068 . 10^9$ cm.

Der erste und letzte Wert weichen um ungefähr 1 Proc. voneinander ab. Die Differenz erklärt sich teilweise aus der Vernachlässigung der Selbstinduction des secundären Stromes. Bei dem ersten Versuch, der bei ca. 1500 Wechsel in der Minute angestellt wurde, war der vernachlässigte Factor k:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(p \frac{L_3}{R_3}\right)^2}} \cdot \frac{\cos(\varphi + \psi)}{\cos \varphi} = 0{,}996,$$

sodass ein Fehler von ungefähr 0,4 Proc. vorhanden ist. Andererseits macht sich die Form der Stromcurve schon etwas bemerkbar, da ungefähr $\varphi = 4^0$ ist. Bei dem letzten Versuch dagegen sind beide Einflüsse verschwindend klein.

Mit Zuhülfenahme des Inductoriums können daher Phasendifferenzen obiger Grössenordnung auf ca. 1 Proc. genau gemessen werden, kleinere Phasendifferenzen genauer.

Am Schlusse dieser Versuchsreihe sei noch erwähnt, dass man, um Rechnung zu vermeiden, sich die Aichungscurven construieren kann, aus denen man direct die Phasendifferenz entnimmt, die einem gezogenen Rheostatenwiderstand entspricht.

Die Theorie gestattete, die Methode noch in anderer Weise anzuwenden, nämlich die Messung bei constantem Widerstand des secundären Stromkreises durch Veränderung der gegenseitigen Induction auszuführen. Eine Aichungscurve für diese Zwecke ist in der Tafel, Fig. 5, angegeben.

Dieselbe wurde auf folgende Weise erhalten:

Durch Widerstände und Selbstinduction stellte ich in zwei Zweigströmen, ebenso wie bei obigen Versuchen, bekannte Phasendifferenzen her und verschob dann die innere Spule meines Inductoriums, die durch 10 Ω geschlossen war solange.

bis der Phasenindicator keinen Ausschlag gab. In der Tafel ist die Verschiebung, vom Punkte der grössten Induction an gerechnet, in Millimetern auf der Abscissenaxe, die zugehörige Phasendifferenz in Secunden als Ordinaten aufgetragen.

Der Messbereich ist bei dieser Art der Messung beschränkt, indem die gegenseitige Induction des Phasenindicators stets als Constante zu der veränderlichen des Inductoriums hinzutritt. Es ist daher nötig, bei kleineren Phasendifferenzen den äusseren Widerstand entsprechend grösser zu wählen; die Aichungscurve bleibt bis auf einen constanten Factor dabei dieselbe.

Mit Hülfe der Curve lässt sich an einem für diese Art der Messung bestimmten Inductorium die Einteilung statt in Millimeter gleich in Secunden herstellen für bestimmte äussere Widerstände, sodass man direct die Phasendifferenz am Apparat abliest.

Fig. 6 der Tafel giebt 3 Aichungscurven meines Apparates für grosse Phasendifferenzen, abhängig von der Tourenzahl. Die Aichung geschah auf folgende Weise.

An die primäre Spule des Phasenindicators legte ich einen Nebenschluss von 0,160 Ω, sodass also in der Formel

$$n = \frac{3{,}65}{0{,}160} = 22{,}8 \tag{22}$$

wurde. Für die Curven I mit II stellte ich die Phasendifferenzen durch Stromverzweigung dar, indem eine Spule mit Eisenkern die nötige hohe Selbstinduction in einem der Zweigströme ermöglichte; bei der Curve III dienten die beiden Anker ohne Eisen als Stromquelle, und die Phasendifferenz wurde durch Verstellen beider Anker gegeneinander erreicht. Gemessen wurde die Phasendifferenz für alle 3 Curven nach der ersten Messmethode mittels Galvanometer und Contactrad.

Dabei war die Versuchsanordnung derartig; dass am selben Stativ mit Hülfe zweier Scalen durch ein Fernrohr der Phasenindicator, durch ein zweites das Galvanometer beobachtet wurde. In den Curven sind die am Phasenmesser abgelesenen Phasendifferenzen in Graden als Ordinaten, die Widerstände, die eingeschaltet werden mussten, um den Phasenindicator auf Null zu bingen, als Abscissen aufgetragen. Da die

Curven im allgemeinen hyperbolischen Verlauf zeigen, sind für die kleineren Phasendiffenzen die Widerstände in $^1/_{10}$ Maassstab aufgetragen.

Es beziehen sich demnach die unteren Curven auf die in Klammer gesetzten Abscissenwerte.

Die Curven I und II zeigen, wie bei denselben Stromcurven die Aichung abhängig ist von der Tourenzahl; zeichnet man dieselben auch für andere Tourenzahlen ein, so lässt sich aus einem solchen Curvensystem durch Interpolieren für jede gegebene Periode die Phasendifferenz ablesen.

Die Curve III, welche bei derselben Tourenzahl aufgenommen wurde wie II, soll zeigen, dass die Aichung thatsächlich, wie die Theorie es verlangt, von der Stromcurve abhängig ist. Man erkennt, dass die Abweichungen beider Aichungen im allgemeinen nur gering sind und bei weniger genauen Messungen vernachlässigt werden können.

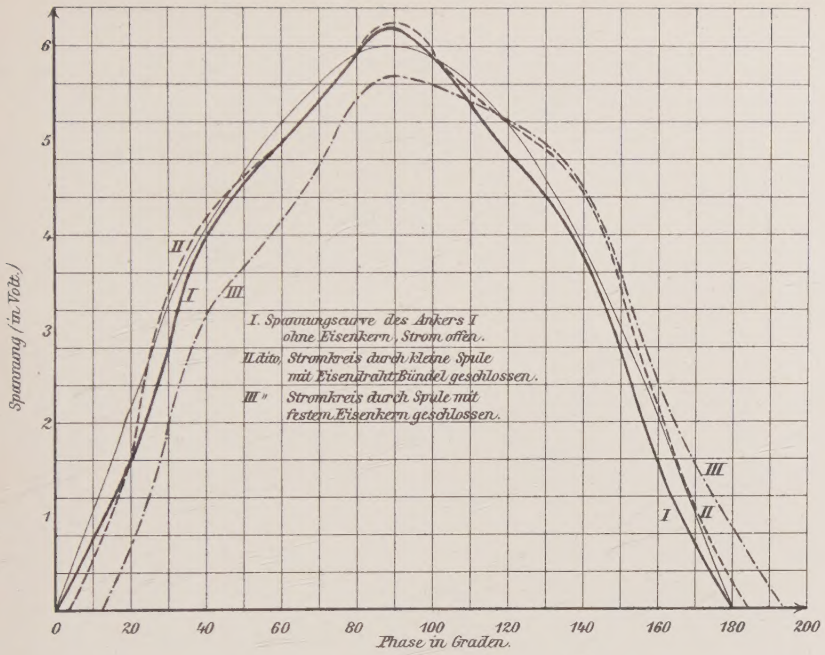
Zum Schlusse habe ich noch mittels dieser Methode eine Bestimmung der Veränderlichkeit des Selbstinductionscoefficienten mit der Stromstärke bei Anwesenheit von Eisen ausgeführt. Die Versuche wurden in verzweigtem Stromkreise angestellt und durch Einschalten von grossen inductionsfreien Widerständen die Phasendifferenz genügend klein gewählt, um sie mit Hülfe des Inductoriums unabhängig von der Tourenzahl messen zu können. Die Berechnung geschah genau in derselben Weise, wie für die Bestimmung der Selbstinductionscoefficienten des Inductoriums angegeben ist. Die Stromstärke wurde mittels Dynamometer gemessen. Das Resultat giebt Fig. 4 Curve II der Tafel wieder, die sich auf die zart geschriebenen Abscissenwerte bezieht. Die einzelnen berechneten Punkte liegen hier genauer auf der Curve, als bei der ersten Messmethode. Eine Reduction auf Sinustrom brauchte bei der Kleinheit der Phasendifferenz nicht vorgenommen zu werden. Die Inductionsspule hatte eine etwas gröbere Wickelung als die bei der Curve I benutzte; der Eisenkern war bei beiden Versuchen derselbe.

Die Resultate sind nicht sehr verschieden; nur steigt bei II die Selbstinduction nicht so schnell mit der Stromstärke an.

Aus den theoretischen und experimentellen Untersuchungen erkennt man, dass die Phasenmessung mittels Phasenindicators vornehmlich dort geeignet ist, wo es sich um die Bestimmung sehr kleiner Phasendifferenzen und Zeiten handelt. Zur Bestimmung von Selbstinductionscoefficienten hat diese Methode vor der zuerst beschriebenen den Vorzug, dass sie mit jedem beliebigen Wechselstrom ohne Zeitmessung und ohne Reduction auf Sinusstrom angestellt werden kann. Zur Phasendifferenzenmessung sehr schneller Schwingungen, wie Condensatorentladungen und ähnlicher Erscheinungen, kann vermutlich diese Methode bei geeigneter Wickelung des Phasenindicators ebenso dienen, wie für den gewöhnlichen Wechselstrom der Technik, während alle bisher bekannten Methoden für derartige Versuche unbrauchbar sind.

In beiden Methoden zusammen glaube ich ein Mittel zur Messung von Phasendifferenzen gleich periodischer Wechselströme gefunden zu haben, das den Anforderungen einer exacten physikalischen Messung genügt und auch für technische Zwecke sich bei geeigneter Ausführung mit Vorteil verwenden lässt.

Fig. 1.


Spannung (in Volt.)
Phase in Graden.
I. Spannungscurve des Ankers I ohne Eisenkern, Strom offen.
II. dito, Stromkreis durch kleine Spule mit Eisendraht-Bündel geschlossen.
III. " Stromkreis durch Spule mit festem Eisenkern geschlossen.

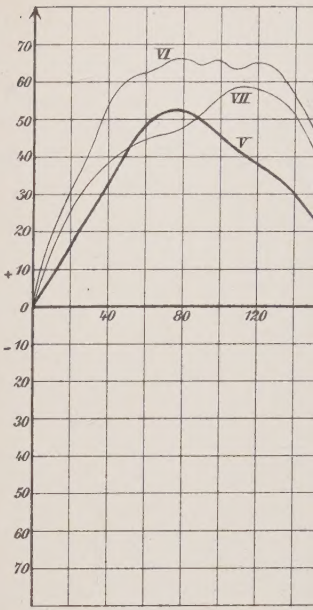
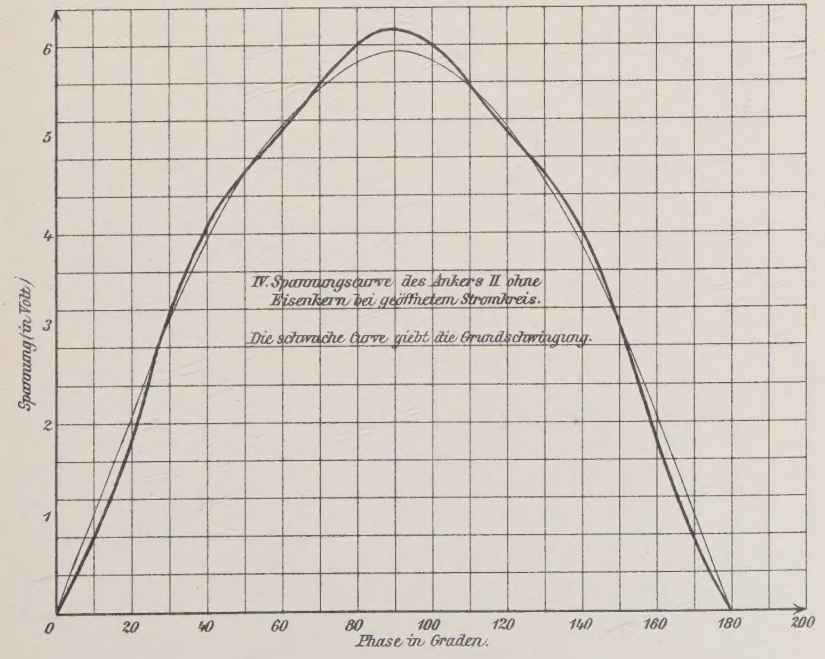
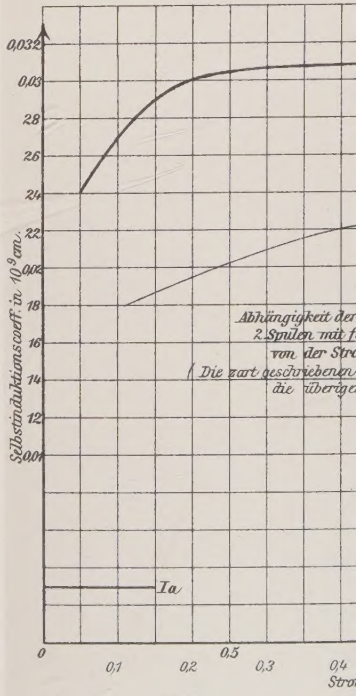
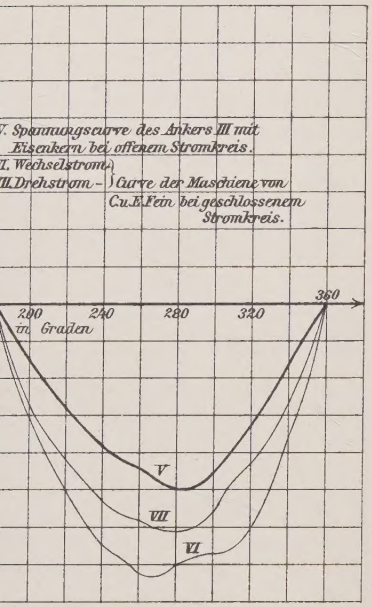

VI.
VII.
V.

Fig. 2.


Spannung (in Volt.)
Phase in Graden.
IV. Spannungscurve des Ankers II ohne Eisenkern bei geöffnetem Stromkreis.
Die schwache Curve giebt die Grundschwingung.


Selbstinductionscoeff. in 10⁹ cm.
Abhängigkeit der
2 Spulen mit
von der Str
Die zart geschriebenen
die übrige
Ia

g. 3.



g. 4.

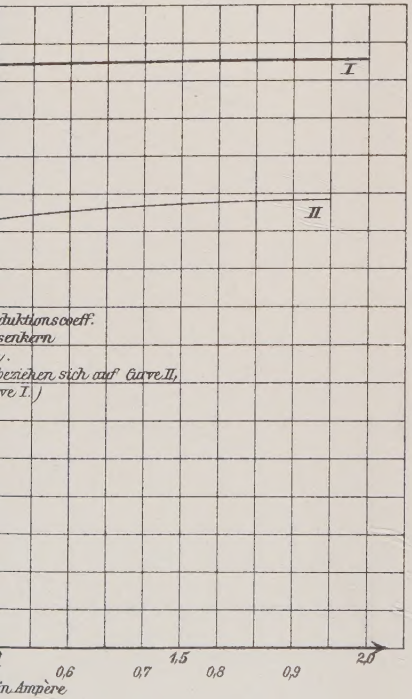


Fig. 5.

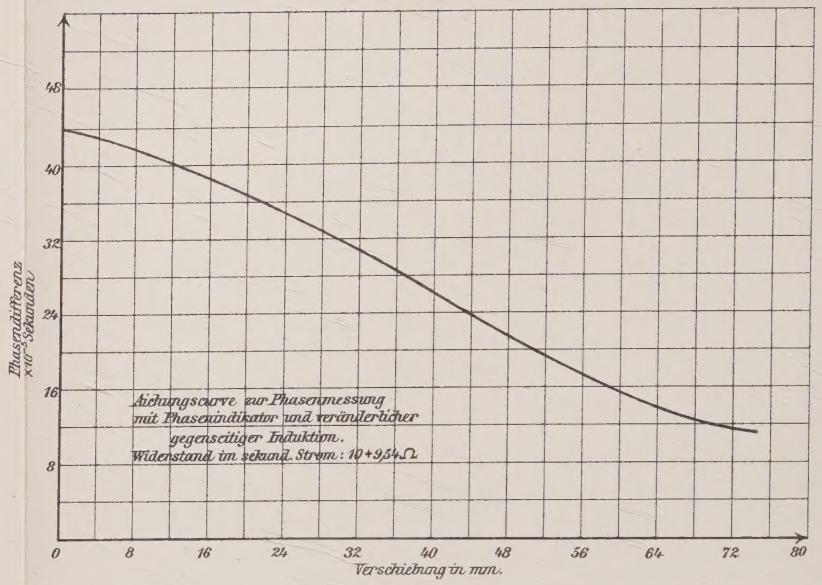
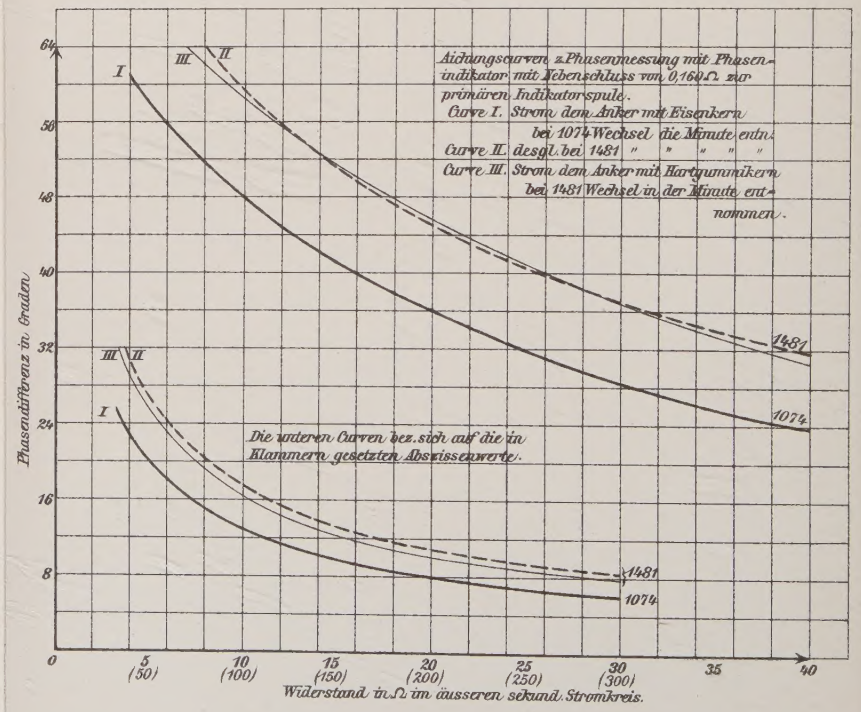


Fig. 6.



Lith. Anst. v. C. Kürst, Leipzig.